COMPTES RENDUS
(DOKLADY)
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

1938

IMPERIAL MYCOLOGICAL
13 MAR. 1939
INSTITUTE

VOLUME XXI

№ 9

ÉDITION DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
MOSCOU

AVIS AUX AUTEURS

Les «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS» paraissent tous les dix jours, neuf numéros formant un volume d'environ 500 pages pourvu d'une table des matières.

Les «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS» publient des communications courtes précisant l'essentiel des travaux plus volumineux en préparation. Ces articles, ne dépassant pas comme règle dix mille signes typographiques, sont donnés en l'une des trois langues: français, anglais, allemand. Ils embrassent les sciences mathématiques, physiques, naturelles et techniques, reproduisant les résultats de recherches scientifiques actuellement en cours ou à peine achevées qui représentent les plus récentes données de l'investigation scientifique.

Les auteurs ont droit chacun à 25 extraits gratuits.

Les manuscrits doivent être adressés à la Rédaction des «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS»—Moscou, Volchonka, 14, chambre 211a.

25 Décembre

COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

COMITÉ DE RÉDACTION

A. Borissiak, de l'Académie, **A. Fersman**, de l'Académie, **A. Frumkin**, de l'Académie.
A. Richter, de l'Académie, **S. Wawilow**, de l'Académie

NOUVELLE SÉRIE

6-me année

Paraissant tous les dix jours

1938

VOLUME XXI, № 9

TABLE DES MATIÈRES

Pages

MATHÉMATIQUES

S. Bachvaloff. Sur un couple de congruences paraboliques 415
M. Grinblum. Sur une transformation des espaces de suites numériques . 418
N. Tchudakoff. On the Functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$ 421

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

A. Andronov et **E. Leontovich.** Sur la théorie de la variation de la structure qualitative de la division du plan en trajectoires 423

PHYSIQUE

D. Skobelzyn. La diffusion électronique de rayons-béta rapides 427
D. Skobelzyn. Le mécanisme anormal de diffusion et d'absorption des rayons-béta 431
George M. Ivanov. Long-Time Resistance of a Viscous Material Having Elasticity 436

PHYSIQUE DU GLOBE

V. V. Timonov and **P. P. Kuzmin.** Approximate Determination of the Heat-Balance of the White Sea 440
P. P. Kuzmin. Heat-Transfer from the Sea into the Air by Evaporation and Convection 445

GÉOLOGIE

V. E. Khain. A Contribution to Paleogeography of Northern Caucasus during the Upper Mesozoic and Lower Paleogene 449

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE

D. A. Komissarov. Effect of Growth Substances upon Rooting Response of Cuttings from Pine and Other Woody Species 453

ZOOLOGIE

M. Mstislavsky. A Method for the Designing of a Normal Curve of Growth of a Living Organism 457

Rédacteur en chef A. Fersman

Rédacteur S. Bernstein

En composition 27/XI 1938. En impression 13/I 1939. Nombre de feuilles d'impression 3. Nombre de caractères par feuille d'impression 65.000. Pages 413—460. Format du papier 72×110 cm. Tirage 1 000. Glavlit A-709. Numéro d'édition 2058. Numéro typographique 1902.

Imprimerie № 16. Moscou. Trekhproudnij péréoulok, 9.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

MATHÉMATIQUES

SUR UN COUPLE DE CONGRUENCES PARABOLIQUES

Par S. BACHVALOFF

(Présenté par N. N. Lusin, de l'Académie, le 23.X.1938)

1. Établissons une correspondance biunivoque et continue entre les points A_0 et A_3 des surfaces $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_3$ telle que les lignes asymptotiques de l'une de ces surfaces correspondent aux lignes asymptotiques de l'autre surface.

Les droites l joignant les points correspondants de ces surfaces définissent une certaine congruence L. Les plans tangents aux surfaces $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_3$ aux points correspondants se coupent suivant des droites l'; ces droites déterminent une seconde congruence L'. L'ensemble des deux congruences L et L' sera nommé couple de congruences.

Dans un article précédent (1) j'ai indiqué quelques propriétés des couples de congruences L, L' du type hyperbolique (ayant des points focaux différents). Dans la présente Note je considère le cas où l'une des deux congruences est du type parabolique.

2. Soit T un tétraèdre mobile déffinissant ce couple de congruences. Plaçons deux de ses sommets aux points A_0 et A_3 des surfaces $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_3$, le troisième sommet dans le point focal A_1 du rayon l', le quatrième dans un certain point A_2 du rayon l'.

Une translation du tétraèdre dans l'espace projectif euclidien est déterminée par le système d'équations:

$$dA_j = \omega_{j0} A_0 + \omega_{j1} A_1 + \omega_{j2} A_2 + \omega_{j3} A_3. \tag{1}$$

Les formes différentielles $\omega_{ij} = a_{ij}du + b_{ij}dv$ vérifient les équations:

$$\omega'_{ij} = [\omega_{i0}\,\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\,\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\,\omega_{2j}] + [\omega_{i3}\,\omega_{3j}]. \tag{2}$$

Comme les plans $A_0 A_1 A_2$ et $A_3 A_1 A_2$ sont respectivement tangents aux surfaces $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_3$, on a

$$\omega_{03} \equiv 0, \quad \omega_{30} \equiv 0. \tag{3}$$

Il suit de l'équation $\omega'_{03} \equiv 0$ que

$$\omega_{13} = p\omega_{01} + q\omega_{02}; \quad \omega_{23} = q\omega_{01} + r\omega_{02}. \tag{4}$$

Posons

$$\omega_{31} = u\omega_{01} + v\omega_{02}; \quad \omega_{32} = w\omega_{01} + t\omega_{02}, \tag{5}$$

$$\omega_{10} = \alpha\omega_{13} + \beta\omega_{23}; \quad \omega_{20} = \gamma\omega_{13} + \delta\omega_{23}. \tag{6}$$

Les points focaux $\psi_k = A_1 + \rho_k A_2$ $(k = 1,2)$ du rayon $A_1 A_2$ sont déterminés par l'équation

$$\gamma\rho^2 + (\alpha - \delta)\rho - \beta = 0. \tag{7}$$

Supposons que les points focaux du rayon l coïncident avec le point A_1; il suit de l'équation (7) que

$$\beta = 0;\ \alpha = \delta;\ \gamma \neq 0. \tag{8}$$

De la condition $\omega_{30} \equiv 0$, qui exprime la correspondance asymptotique des surfaces, on déduit que

$$\begin{gathered} u\alpha p + w(\gamma p + \alpha q) = p\theta;\ u\alpha q + w(\gamma q + \alpha r) = q\theta; \\ v\alpha p + t(\gamma p + \alpha q) = q\theta;\ v\alpha q + t(\gamma q + \alpha r) = r\theta, \end{gathered}$$

où θ est une nouvelle fonction.

On obtient de ces équations

$$u = \frac{\theta}{\alpha};\ w = 0;\ v = -\frac{\gamma\theta}{\alpha^2};\ t = \frac{\theta}{\alpha}.$$

Le cas $\Delta = \alpha^2(pr - q^2) = 0$ est exclu parce qu'il ne présente aucun intérêt.

En posant $\theta = \alpha^2 s$, on obtient le système suivant d'équations, déterminant le couple de congruences:

$$\left.\begin{gathered} \omega_{31} = \alpha s\omega_{01} - \gamma s\omega_{02};\ \omega_{10} = \alpha\omega_{13};\ \omega_{13} = p\omega_{01} + q\omega_{02};\ \omega_{03} = 0 \\ \omega_{32} = \alpha s\omega_{02};\ \omega_{20} = \gamma\omega_{13} + \alpha\omega_{23};\ \omega_{23} = q\omega_{01} + r\omega_{02};\ \omega_{30} = 0 \end{gathered}\right\}. \tag{9}$$

3. Parmi les quatre sommets du tétraèdre T le sommet A_2 n'est pas déterminé géométriquement; en le choisissant sur le rayon l' nous allons considérer deux cas:

a) le rayon $A_0 A_1$ n'est tangent à aucune des lignes asymptotiques de la surface $\mathbf{A}_0$;

b) le rayon $A_0 A_1$ est tangent à une ligne asymptotique de la surface $\mathbf{A}_0$.

Cas a). Choisissons A_2 de telle manière que $A_0 A_1$ et $A_0 A_2$ soient harmoniquement conjugués par rapport aux lignes asymptotiques de la surface $\mathbf{A}_0$. Dans ce cas $q = 0$.

Normons ensuite les coordonnées des sommets. Remplaçons A_0, A_1, A_2, A_3 respectivement par $\lambda_0\tilde{A}_0$, $\lambda_1\tilde{A}_1$, $\lambda_2\tilde{A}_2$, $\lambda_3\tilde{A}_3$. Alors

$$\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \text{ et } \omega_{kk} = \tilde{\omega}_{kk} + \frac{d\lambda_k}{\lambda_k}, \tag{10}$$

où les $\tilde{\omega}_{ik}$ sont les formes qui correspondent aux points $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3$.

Choisissons λ_j de telle manière que

$$\alpha\frac{\lambda_0}{\lambda_3} = 1;\ \gamma\frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} = 1;\ p\frac{\lambda_0\lambda_3}{\lambda_1^2} = 1 \text{ et } \tilde{\omega}_{00} + \tilde{\omega}_{11} + \tilde{\omega}_{22} + \tilde{\omega}_{33} = 0.$$

Le système d'équations (9) se réduit au système suivant:

$$\begin{gathered} \tilde{\omega}_{31} = s\tilde{\omega}_{01} - s\tilde{\omega}_{02};\ \tilde{\omega}_{10} = \tilde{\omega}_{13};\ \tilde{\omega}_{13} = \tilde{\omega}_{01}; \\ \tilde{\omega}_{32} = s\tilde{\omega}_{02};\ \tilde{\omega}_{20} = \tilde{\omega}_{13} + \tilde{\omega}_{23};\ \tilde{\omega}_{23} = r\tilde{\omega}_{02}. \end{gathered}$$

Il est aisé de voir que dans ce cas la solution dépend d'une fonction de deux arguments.

Cas b). Choisissons A_2 de telle manière que le rayon A_0A_2 soit tangent à la ligne asymptotique de la seconde famille de la surface $\mathbf{A}_0$; dans ce cas

$$p = r = 0.$$

Après avoir normé le système d'équations (9), nous voyons qu'il prend la forme:

$$\tilde{\omega}_{31} = s\tilde{\omega}_{01} - s\tilde{\omega}_{02};\ \tilde{\omega}_{10} = \tilde{\omega}_{13};\ \tilde{\omega}_{13} = \tilde{\omega}_{02};$$
$$\tilde{\omega}_{32} = s\tilde{\omega}_{02};\ \tilde{\omega}_{20} = \tilde{\omega}_{13} + \tilde{\omega}_{23};\ \tilde{\omega}_{23} = \tilde{\omega}_{01}.$$

La solution de ce système dépend de 6 fonctions d'un argument.

4. Signalons les propriétés suivantes de tels couples de congruences:

1) la congruence A_0A_3 est du type parabolique;

2) si la congruence L est du type parabolique, L' l'est aussi;

3) le plan tangent au point Φ de la surface focale de la congruence L passe par le point focal A_1 de la congruence L';

4) si l'on exige que le plan tangent en A_1 à la surface focale de la congruence L' contienne le point focal Φ, le couple de congruences (L, L') est stratifiable dans deux directions;

5) les points focaux Φ, P, Q des rayons des congruences A_0A_3, A_0A_1, A_3A_1 sont situés sur une même droite.

Dans le cas b) les congruences A_0A_1, A_3A_1 sont du type parabolique; les points focaux P et Q coïncident respectivement avec les points A_0 et A_3.

Faculté Mathématique
à l'Université de Moscou.

Manuscrit reçu
le 2.XI.1938.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] S. Bachvaloff, C. R. Acad. Sci. URSS, I (X), No 5 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

MATHÉMATIQUES

SUR UNE TRANSFORMATION DES ESPACES DE SUITES NUMÉRIQUES

Par M. GRINBLUM

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 28.X.1938)

I. Soit $\mathfrak{A}$ un espace de suites numériques qui possède une base unitaire, c'est-à-dire un espace de type (B) formé de suites numériques, contenant tous les éléments de la forme

$$\eta^n = \{\underbrace{0,0,\ \ldots,\ 0}_{n-1},\ 1,\ \underbrace{0,0,\ \ldots}_{\text{zéros}}\}$$

et tel que chaque élément a de cet espace peut être présenté d'une seule manière dans la forme

$$a = a_1\eta' + a_2\eta^2 + \ \ldots\ + a_n\eta^n + \ \ldots, \tag{1}$$

où

$$a = \{a_1, a_2, \ \ldots\}.$$

Il est évident que chaque fonctionnelle linéaire $V(a)$ définie dans $\mathfrak{A}$ peut être présentée dans la forme

$$V(a) = b_1a_1 + b_2a_2 + \ \ldots\ + b_na_n + \ \ldots, \tag{2}$$

où $b_i = V(\eta^i)$. Pour ce qui suit il est important de remarquer qu'inversement, si pour une certaine suite numérique $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ \ldots\}$ les séries $\sum_1^\infty b_i a_i$ convergent pour tous les $a \in \mathfrak{A}$, alors $\sum_1^\infty b_i a_i$ est une fonctionnelle linéaire dans $\mathfrak{A}$.

II. Soit maintenant E un certain espace du type (B) et $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ une suite complète d'éléments de cet espace.

Supposons maintenant que quel que soit un élément $a \in \mathfrak{A}$, la série $\sum_1^\infty a_i x_i$ converge faiblement vers un certain élément $x \in E$. Représentons les éléments $x \in E$ sous la forme de «sommes» des séries $\sum_1^\infty a_i x_i$ faiblement convergentes, où $a \in \mathfrak{A}$ forment une multiplicité linéaire partout dense dans E. Soit D cette multiplicité. Désignons par

$$x = L(a)$$

l'opérateur additif et homogène qui transforme $\mathfrak{A}$ en D. [$L(a)$ est égal à la «somme» de la série $\sum_1^\infty a_i x_i$ faiblement convergente, où $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$].

Théorème 1. *L'opérateur $x = L(a)$ est continu.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que quelle que soit la suite $a^1, a^2, \ldots, a^m, \ldots$ d'éléments $a^m \equiv \{a_1^m, a_2^m, \ldots\}$ de l'espace $\mathfrak{A}$, si elle converge vers l'élément nul, les normes des éléments de la suite correspondante dans E: $x^1, x^2, \ldots, x^m, \ldots$ seront bornées. Remarquons d'abord que si F est une fonctionelle linéaire dans E et $x \in D$, on a

$$F(x) = \sum_1^\infty a_i F(x_i).$$

Ensuite, comme $\sum_1^\infty a_i F(x_i)$ converge pour chaque $a \in \mathfrak{A}$, on voit que $\sum_1^\infty a_i F(x_i)$ est une fonctionnelle linéaire dans $\mathfrak{A}$. Désignons cette fonctionnelle par V. [$F(x_i) = V(\eta^i)$]. Alors $F(x) = V(a)$ pour tous les $x \in D[x = L(a)]$. Soit maintenant $a^m \to 0$ et $x^m = L(a^m) =$ faible $\sum_1^\infty a_i^m x_i$. Alors $F(x^m) = V(a^m)$, donc $F(x^m) \to 0$ pour $m \to \infty$. Or, F est une fonctionnelle linéaire quelconque dans E, donc les normes des x^m sont bornées, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Soit, comme précédemment, $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ une suite complète d'éléments de E et $\mathfrak{A}$ — un espace de suites numériques ayant une base unitaire. Alors:

Si les séries $\sum_1^\infty a_i x_i$ convergent faiblement pour tous les $a \in \mathfrak{A}$, elles convergent fortement.

En effet, $\mathfrak{A}$ étant un espace à base unitaire, on a pour chaque $a \in \mathfrak{A}$

$$|a - \overline{a^n}| \to 0, \quad \text{si } n \to \infty,$$

où $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots\}$ et $\overline{a^n} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \underbrace{0,0, \ldots}_{\text{zéros}}\}$.

Mais dans ce cas d'après le théorème 1 on a $L(a) = \lim_{n\to\infty} L(\overline{a^n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n a_i x_i$, ce qu'il fallait démontrer.

III. Supposons maintenant que l'opérateur $x = L(a)$ précédemment défini réalise une transformation biunivoque de $\mathfrak{A}$ en D, c'est-à-dire qu'il existe $L^{-1}(x) = a$.

Remarquons que dans ce cas on a les propriétés suivantes de cette transformation:

1. Si D ne coïncide pas avec E, il existe une suite $x^n = \sum_1^\infty a_i^n x_i$

qui converge vers l'élément nul et telle que la suite a^n correspondante diverge en croissant indéfiniment (c'est-à-dire $|a^n| \to \infty$ pour $n \to \infty$).

2. Si D coïncide avec E, l'opérateur $L^{-1}(x)$ est continu.

3. Pour que l'espace E soit isomorphe avec $\mathfrak{A}$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe dans E une base $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ vérifiant les conditions suivantes:

1) chaque élément $x \in E$ peut être présenté dans la forme $x = \sum_1^\infty a_i x_i$, où a est un élément de $\mathfrak{A}$;

2) si $a \in \mathfrak{A}$, la série $\sum_1^\infty a_i x_i$ converge.

Exemples. 1) Soit $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ une suite de fonctions appartenant à L_p $(p > 1)$. Alors on a le

Théorème. *Si les séries* $\sum_1^\infty a_i \int_0^1 f_i(x)\, \alpha(x)\, dx$ *convergent quel que soit l'élément* $a \in \mathfrak{A}$ *et la fonction* $\alpha(x)$ *appartenant à* Lq $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *alors les séries* $\sum_1^\infty a_i f_i(x)$ *convergent au sens de la convergence dans l'espace* Lp.

2) Soit $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ une suite de fonctions continues.

Théorème. *Si les séries* $\sum_1^\infty a_i \int_0^1 f_i(x)\, dg(x)$ *convergent quel que soit l'élément* $a \in \mathfrak{A}$ *et quelle que soit la fonction* $g(x)$ *à variation bornée; si d'ailleurs, on a toujours* $\sum_1^\infty a_i \int_0^1 f_i(x)\, dg(x) = \int_0^1 f(x)\, dg(x)$, *où* $f(x)$ *est une fonction continue (dépendant de* $a \in \mathfrak{A}$), *alors les séries* $\sum_1^\infty a_i f_i(x)$ *convergent uniformément.*

IV. Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ une suite d'éléments de l'espace E [où E est un certain espace du type (B)].

Théorème 2. *Si les séries* $\sum_1^\infty a_i F_i(x)$ *convergent pour chaque* $x \in E$ *et quel que soit l'élément* $a \in \mathfrak{A}$, *on a:*

1. *L'opérateur* $F = L(a)$, *où* F, *un élément de* E, *défini par la série* $\sum a_i F_i(x)$, *est continu.*

2. *Les séries* $\sum_1^\infty a_i F_i$ *convergent fortement.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1.

Université d'État
à Voronezh.

Manuscrit reçu
le 1.XI.1938.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

MATHEMATICS

ON THE FUNCTIONS $\zeta(s)$ AND $\pi(x)$

By N. TCHUDAKOFF

(Communicated by I. M. Vinogradow, Member of the Academy, 1. XI. 1938)

1. By application of Vinogradow's method in the form due to Van der Corput (1) I prove the following theorem:

(A). Let $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, where $n \geqslant 10$; $a_n, \ldots a_0$ are real numbers; $q = |a_n|^{-1} > 8n$; μ is a real number, which satisfies the condition

$$q^{\frac{1}{n}} \leqslant \mu \leqslant q\,(2n)^{-1};$$

X is an integer $\leqslant \mu$; P is an arbitrary integer; A, c, $c_1 \ldots$ are positive constants.

Then

$$\sum_{X=P+1}^{P+X} \exp\, 2\pi i f_n(x) = 0\,(n^c \mu q^{-\frac{A}{n^4 \lg n}} (\lg q)^2 + q^{\frac{1}{n-1}}).$$

2. Theorem (A) enables us to prove theorem (B):

$$\zeta(s) = 0\,(\exp \Phi(t)), \quad \text{if} \quad \sigma \geqslant 1 - (\lg t)^{-\eta},$$

where α is an arbitrary number between $\frac{3}{4}$ and 1; $\frac{3}{4} < \eta < \alpha$; $0 < 1 - \gamma\eta < \alpha - \eta$.

$$\Phi(t) = 0\,((\lg t)^{1-\gamma\eta}).$$

Proof. It is known that

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{t^{1/10}} n^{-s} + 0\,(\lg^2 t), \text{ if } \sigma \geqslant 1 - 2^{-9} 11^{-1}. \tag{1}$$

Let $\lg T = (\lg t)^{\eta}$; then

$$\sum_{1}^{T} n^{-s} = 0\,(T^{1-\sigma} \lg T) = 0\,(\lg^{\eta} t). \tag{2}$$

It is evident that

$$\sum_{T}^{t^{1/10}} n^{-s} = 0\left(\lg t \max_{N} N^{-\sigma} \max_{N \leqslant N' \leqslant 2N} \left| \sum_{N}^{N'} n^{ti} \right|\right). \tag{3}$$

Let $\mu = \left[\frac{1}{2} N t^{-\frac{1}{n+1}}\right]$.

Then [2]

$$\sum_{P+1}^{P+\varkappa} n^{it} = 0\left(\max_{1\leqslant X\leqslant \mu}\left|\sum_{X=1}^{X}\exp\ 2\pi i f_n(x)\right|\right),$$

where $P = N + m\varkappa\ (m = 1, \ldots \left[\frac{N'}{\varkappa}\right] + 1)$; $f_n(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\frac{x^m t^m}{2\pi m P^m}$; $n = \left[\frac{3}{2}\frac{\lg q}{\lg N}\right]$.

By theorem (A)

$$\max_{1\leqslant X\leqslant \mu}\left|\sum_{X=1}^{X}\exp\ 2\pi i f_n(x)\right| = 0\left(n^c \mu q^{-\frac{A}{n^4 \lg n}} (\lg q)^2 + q^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

and hence

$$\max_{N}\ N^{-\sigma}\max_{N'\leqslant N'\leqslant 2N}\left|\sum_{N}^{N'} n^{it}\right| = 0\left(N^{1-\sigma}\left(n^c q^{-\rho}(\lg q)^2 + \frac{1}{\mu} q^{\frac{1}{n-1}}\right)\right), \qquad (4)$$

where $\rho = A\left(\frac{\lg N}{\lg t}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$.

It is now easily verified that

$$\frac{1}{\mu} q^{\frac{1}{n-1}+\rho} = 0\,(1).$$

Hence the second term in (4) can be omitted and we obtain by (3) and (4)

$$\sum_{T}^{t+\varkappa} n^{-s} = 0\,(\lg t)^c \max_{N} N^{1-\sigma} t^{-\rho}. \qquad (5)$$

But

$$\max_{N} N^{1-\sigma} t^{-\rho} = 0\,(\exp \Phi_1(t)), \qquad (6)$$

where $\Phi_1(t) = 0\,((\lg t)(1-\sigma)\gamma) = 0\,((\lg t)^{1-\eta})$.

From (1), (2), (5) and (6) follows:

$\zeta(s) = 0\,(\exp \Phi(t))$, if $\sigma \geqslant 1 - (\lg t)^{-\eta}$, where $\Phi(t) = 0\,((\lg t)^{1-\eta})$.

3. We apply now a theorem of Titchmarsh and obtain

$$\zeta(s) \neq 0, \quad \text{if } \sigma \geqslant 1 - c(\lg t)^{-\alpha} \geqslant 1 - c(\lg t)^{-\eta-1+\gamma\eta},$$

since $\alpha > \eta + 1 - \gamma\eta$.

4. By well-known methods we obtain further

$$\pi(x) = \int_{2}^{x}\frac{dx}{\lg x} + 0\,(xe^{-c(\lg x)^{\mu}}),$$

where $\pi(x)$ is the number of primes $\leqslant x$; μ is an arbitrary number $< \frac{1}{\gamma}$.

This result is an improvement of a result of Titchmarsh [3] and of mine [4].

V. Stekloff Institute of Mathematics.
Academy of Sciences of the USSR.

Received
2. XI. 1938.

REFERENCES

[1] Van der Corput, Mathematica, B (1936—37). [2] E. Landau, Vorle-
[3] E. C. Titchmarsh, Quarterly J. of Mathematics, 9.
[4] N. Tschudakoff, C. R. Acad. Sci. URSS, No 3 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

SUR LA THÉORIE DE LA VARIATION DE LA STRUCTURE QUALITATIVE DE LA DIVISION DU PLAN EN TRAJECTOIRES

Par A. ANDRONOV et E. LEONTOVICH

(Présenté par L. I. Mandelstam, de l'Académie, le 31. X. 1938)

On ne saurait se borner, dans l'étude des systèmes physiques, à ne considérer que des systèmes grossiers (1). Cela tient non seulement à ce qu'il y a avantage à considérer dans certains buts spéciaux des systèmes non-grossiers (conservatifs par exemple), mais aussi et surtout à ce que, faisant varier le paramètre d'un système dynamique, nous passons d'un système grossier à un autre système grossier qualitativement différent par l'intermédiaire de systèmes non-grossiers.

De là la nécessité d'étudier et de classer les systèmes non-grossiers, problème intimement lié à la théorie de la variation, en fonction de paramètre, de la structure qualitative de la division du plan de phase en trajectoires.

Cette Note contient la définition et indique les propriétés du type le plus simple de systèmes non-grossiers: les systèmes relativement grossiers par rapport à l'ensemble des systèmes non-grossiers*.

Considérons le système dynamique défini par les deux équations du premier ordre:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{A}$$

x et y étant des coordonnées cartésiennes dans un plan et $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — des fonctions analytiques pour toutes les valeurs considérées de x et y.

Nous nous limiterons, comme il a été déjà fait pour les systèmes grossiers, aux systèmes (A) possédant un «cycle sans contact» g, c'est-à-dire une courbe fermée simple dont la tangente varie d'une façon continue et telle que toutes les trajectoires passant par les points de cette courbe la coupent sans lui être tangentes. Soit G la région du plan comprise dans g.

Considérons en plus de (A) le système altéré:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y), \tag{B}$$

* Remarquons que ce type de systèmes non-grossiers est d'importance fondamentale pour un grand nombre de problèmes physiques concernant la conduite des systèmes dynamiques en cas de variation d'un paramètre (2).

$p(x, y)$, $q(x, y)$ étant également des fonctions analytiques pour toutse les valeurs considérées de x et y.

Définition I. Le système (A) est dit «système non-grossier du premier ordre dans la région G», si:

1) ce système n'est pas un système grossier,

2) quel que soit $\eta > 0$, on peut indiquer une quantité $\varepsilon > 0$ telle que pour toutes les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$, pour lesquelles le système (B) n'est pas grossier, et satisfaisant dans G les conditions:

$$|p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon$$

$$|p'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_y(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_y(x, y)| < \varepsilon$$

$$|p''_{xx}(x, y)| < \varepsilon, \quad |p''_{xy}(x, y)| < \varepsilon, \quad |p''_{yy}(x, y)| < \varepsilon,$$

$$|q''_{xx}(x, y)| < \varepsilon, \quad |q''_{xy}(x, y)| < \varepsilon, \quad |q''_{yy}(x, y)| < \varepsilon,$$

il existe une transformation T biunivoque et bicontinue de la région G (frontière comprise) en elle-même possédant les propriétés suivantes:

1) les points correspondants sont à des distances plus petites que η,

2) aux points d'une même trajectoire du système (A) correspondent les points d'une même trajectoire de (B) et vice versa *.

Les conditions nécessaires pour que le système (A) soit non-grossier du premier ordre dans la région G ** sont énoncées dans les neuf propositions suivantes.

Soient x_0 et y_0 les coordonnées de l'état d'équilibre:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0), & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0), & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad \sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Théorème I. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G d'état d'équilibre tel que $\Delta = 0$, $\sigma = 0$.*

Soit un état d'équilibre pour lequel $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$. D'après Bendixon (3) on peut dans son voisinage réduire le système (A) à la forme:

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y) + \ldots; \quad \frac{dy}{dt} = kx + Q_2(x, y) + \ldots.$$

où $P_2(x, y)$ et $Q_2(x, y)$ sont des termes du 2-ème degré, et les termes omis sont de degrés plus élevés.

Théorème II. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G d'état d'équilibre tel que $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) = 0$.*

Dans ce qui suit un état d'équilibre, pour lequel $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) \neq 0$, sera appelé un **col-noeud**.

Soit un état d'équilibre pour lequel $\Delta > 0$, $\sigma^2 < 4\Delta$. Passant aux coordonnées polaires $x - x_0 = \rho \cos \varphi$, $y - y_0 = \rho \sin \varphi$ et éliminant t, on a:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho R_1(\varphi) + \rho^2 R_2(\varphi) + \rho^3 R_3(\varphi) + \ldots$$

---

* D'une manière analogue on peut définir les systèmes non-grossiers du 2-ème, 3-ème etc. ordre, comme des systèmes relativement grossiers.

** Par la suite nous dirons simplement «systèmes non-grossiers du premier ordre», omettant les mots «dans la région G».

Théorème III. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G d'état d'équilibre tel que* *

$$\sigma = 0,\ \Delta > 0,\ \alpha_3 = \int_0^{2\pi} R_3(\varphi)\, d\varphi.$$

Un état d'équilibre pour lequel $\sigma = 0$, $\Delta > 0$, $\alpha_3 \neq 0$ sera dit un foyer composé du premier ordre.

Soit

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\,[\psi(t+\tau) = \varphi(t), \psi(t+\tau) = \psi(t)]$$

une solution périodique du système (A) correspondant à une trajectoire fermée comprise dans G.

Théorème IV. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G de trajectoire fermée telle que*:

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} [P'_x(\varphi,\psi) + Q'_y(\varphi,\psi)]\, ds = 0$$

$$h_2 = -\int_0^{\tau} \{\rho f [(P''_{xx} - P''_{yy})\,\dot\psi + (Q''_{xx} - Q''_{yy})\,\dot\varphi + 2(Q''_{xy}\dot\psi - P''_{xy}\dot\varphi)] +$$

$$+ 2\rho^2 f [(P'_x + Q'_y)\,(\dot\varphi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\varphi) + (P'_y - Q'_x)\,(\dot\varphi\ddot\varphi + \dot\psi\ddot\psi)]\}\, ds = 0$$

$$\left\{ f(s) = \exp \int_0^s [P'_x(\varphi,\psi) + Q'_y(\varphi,\psi)]\, ds;\ \rho(s) = [\dot\varphi^2 + \dot\psi^2]^{-1} \right\}.$$

Nous appellerons cycles limites doubles les trajectoires fermées telles que $h = 0$, $h_2 \neq 0$.

Nous appellerons séparatrices de col (ou de col-noeud) les demi-trajectoires ω (ou α) orbitalement instables (1) ayant pour point limite ω (α) un col ($\Delta < 0$) (ou un col-noeud).

Théorème V. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G deux séparatrices d'un même col se prolongeant mutuellement, si dans ce col* $\sigma = 0$.

Nous dirons que les trajectoires orbitalement instables d'un système grossier sont des trajectoires orbitalement instables grossières **. Toute autre trajectoire orbitalement instable sera dite orbitalement instable non-grossière.

Définition II. Une trajectoire orbitalement instable non-grossière L_1 est indépendante, si l'ensemble des points de la trajectoire L_1 et de ses points limites ω et α et celui des points et des points

---

* Si $\sigma = 0$, on a $R_1(\varphi) = 0$ et $\int_0^{2\pi} R_2(\varphi)\, d\varphi = 0$.

** Les trajectoires grossières orbitalement instables ne peuvent appartenir qu'à l'un des types suivants:

1) état d'équilibre, pour lequel $\Delta \neq 0$ et si $\Delta > 0$, $\sigma \neq 0$;

2) trajectoire fermée, pour laquelle $h \neq 0$;

3) séparatrice de col ne réunissant pas deux cols, parmi les points limites ω (ou α) de laquelle il ne peut y avoir que les trajectoires orbitalement instables du type 1) et 2).

Toute trajectoire orbitalement instable autre que celles qui viennent d'être énumérées est non-grossière.

limites ω et α de n'importe quelle autre trajectoire L_2 ou bien n'ont aucun point commun, ou bien n'ont en commun que des trajectoires orbitalement instables grossières, ou bien enfin si l'ensemble de leurs points communs est identique à l'ensemble des points de la trajectoire L_1 et de ses points limites ω et α.

Théorème VI. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G deux trajectoires non-grossières orbitalement instables indépendantes.*

Théorème VII. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G une séparatrice de col-noeud allant vers un col (ou partant d'un col), ni deux séparatrices de col-noeud étant le prolongement l'une de l'autre.*

Théorème VIII. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G deux séparatrices de col dont l'une s'enroule sur un cycle limite double et l'autre se déroule de ce cycle.*

Théorème IX. *Si le système* (A) *est non-grossier du premier ordre, il ne peut posséder dans la région G une séparatrice de col appartenant à un col donné et s'enroulant sur une séparatrice (ou se déroulant d'une séparatrice) réunissant un autre col à lui-même.*

Nous dirons que le système (A) satisfait dans la région G les conditions Γ':

a) S'il possède une et une seule trajectoire orbitalement instable non-grossière indépendante.

b) Si cette trajectoire non-grossière indépendante appartient à l'un des types suivants:

1) foyer composé du premier ordre ($\Delta > 0$, $\sigma = 0$, $\alpha_3 \neq 0$);

2) col-noeud [$\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) \neq 0$];

3) cycle limite double ($h = 0$, $h_2 \neq 0$);

4) séparatrice allant d'un col à un col et telle que $\sigma \neq 0$ si elle va d'un col au même col.

c) Si les séparatrices de cols et de cols-noeuds (qui ne sont pas des trajectoires orbitalement instables indépendantes) satisfont les conditions suivantes:

1) une séparatrice de col appartenant à un col donné ne s'enroule pas sur une séparatrice (ne se déroule pas d'une séparatrice) réunissant un autre col à lui-même;

2) une séparatrice de col ne s'enroule pas sur un cycle limite double s'il existe une séparatrice qui se déroule de ce cycle;

3) les séparatrices de cols-noeuds ne peuvent pas aller vers un col, ni être le prolongement l'une de l'autre.

Théorème X. *Si le système* (A) *satisfait dans la région G les conditions* Γ', *il est non-grossier du premier ordre dans la région G.*

Institut Physico-Technique de l'Université.
Gorkij.

Manuscrit reçu
le 1. XI. 1938.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] A. Andronov et L. Pontryagin, C. R. Acad. Sci. URSS, XIV, 247 (1937). [2] A. Andronov et E. Leontovich, Scientific Records of the Gorkij State University, **5**, 1 (1938). [3] J. Bendixon, Acta Mathematica, **24**, 1 (1901). [4] E. Leontovich et A. Mayer, C. R. Acad. Sci. URSS, XIV, 251 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

PHYSIQUE

LA DIFFUSION ÉLECTRONIQUE DES RAYONS-BÉTA RAPIDES*

Par D. SKOBELZYN

(Présenté par S. I. Wawilow, de l'Académie, le 15. XI. 1938)

En étudiant les trajets de rayons-β dans la chambre Wilson, on peut obtenir des renseignements détaillés sur les processus de l'interaction des particules-β rapides avec le champ de l'atome. C'est en particulier en utilisant cette méthode que l'on est conduit à de résultats immédiats concernant les rencontres des particules-β avec les électrons planétaires (dans le gaz dont la chambre de détente est remplie).

Selon la mécanique quantique, dans les cas où l'énergie transmise lors du choc est considérable et grande par rapport au travail d'ionisation, l'électron expulsé peut être considéré comme libre. Par conséquent, les processus en question sont caractérisés par les particularités du choc élastique (la coplanarité des trajets électroniques etc.). On peut donc aisément distinguer ce type de rayons-δ que nous désignons comme les rayons-δ normaux.

Il a été déjà signalé (1) antérieurement qu'à part des fourches et des branches coplanaires on observe fréquemment l'apparition des électrons secondaires anormaux dont les trajectoires se distinguent nettement des fourches normales en déployant des écarts très notables du bilan de l'impulsion. Ces cas sont décrits dans la Note suivante.

L'étude des fourches et des ramifications normales permet d'effectuer une vérification très détaillée des lois de conservation relativement aux processus élémentaires dans le domaine relativiste. Une pareille vérification a déjà été effectuée par Champion (2) dans la région des vitesses entre 400 et 800 ekV.

Nous exposons les résultats relatifs aux vitesses dans les limites 1000—3000 ekV (l'énergie moyenne 1800 ekV). Nous employons aussi une méthode de comparaison des données expérimentales avec les équations du choc élastique qui diffère de celle utilisée par Champion et qui nous semble plus immédiate.

Dans le cas favorable il est possible de mesurer cinq valeurs des paramètres caractérisant le choc, reliées par les équations du bilan d'énergie et d'impulsion.

Connaissant deux entre eux, il est possible de calculer les trois autres et de les comparer au résultat des mesures immédiates.

Le tableau suivant et la fig. 1 en donnent un exemple.

Mesuré $E_0 = 1350$ ekV	$\theta_2 = 66°$
Calculé	Mesuré
$E_2 = 100$ ekV	130 ekV
$E_1 = 1100$ »	1200 »
$\theta_1 = 14°$	16°

* Les clichés utilisés pour les mesures dont les résultats sont exposés dans cette Note ainsi que dans la Note suivante ont été obtenus par E. Stepanowa.

Le système de référence lié au centre de gravité (système normal) présente des avantages essentiels pour les calculs et la comparaison aux données expérimentales.

On obtient aisément les formules de transformation suivantes:

β — vitesse de particule primaire dans le système de référence laboratoire; β_c — la même grandeur dans le système normal; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; α — l'angle de diffusion dans le système normal (fig. 2); θ_1 et θ_2 — les angles de projection des particules secondaires dans le système laboratoire; x — vitesse d'une des particules secondaires dans le système laboratoire (la vitesse de lumière est posée égale à l'unité).

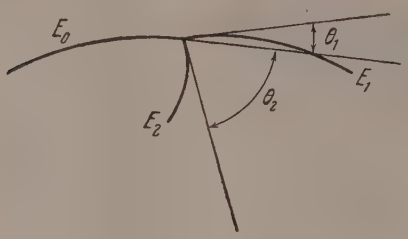


Fig. 1.

Fig. 2.

$$\beta_c = \frac{\beta\gamma}{\gamma+1} \tag{1}$$

$$x = \frac{2\beta_c \cos\theta}{1+\beta_c^2\cos^2\theta}; \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\alpha\sqrt{1-\beta_c^2}}{1\pm\cos\alpha}\ *; \tag{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_1}. \tag{4}$$

En utilisant (1), (2) et (3) on déduit aisément la relation

$$Q = mc^2\left[\frac{(\gamma-1)}{2} - \frac{(\gamma-1)}{2}\cos\alpha\right], \tag{5}$$

où Q est l'énergie cinétique du rayon-δ (dans le système laboratoire).

Il en résulte l'équation suivante pour la valeur A du rapport: l'énergie transmise lors du choc à l'énergie de la particule primaire:

$$A = \frac{Q}{E_0} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad [E_0 = (\gamma-1)mc^2]. \tag{6}$$

La valeur $A = \frac{Q}{E_0}$ est donc une fonction simple de l'angle α et ne dépend pas de l'énergie primaire.

On peut immédiatement utiliser l'équation (6) pour la vérification expérimentale.

En cas où les deux angles θ_1 et θ_2 ** ont été mesurés, il fut possible de calculer α en utilisant la relation (4). D'autre part, l'énergie Q et le rapport $\frac{Q}{E_0}$ pouvaient être mesurés immédiatement. Les points marqués

---

* Nous posons $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

** Pour les mesures des angles on a utilisé le stéréocomparateur Pulfrich.

sur la fig. 3 correspondent aux différentes mesures* [sur l'axe des ordonnées sont portées les valeurs de A, sur l'axe des abscisses—celles des angles α, calculées d'après la formule (4)].

Quelques points aberrants sont dans les limites des erreurs possibles**.

Le second problème que les mesures décrites ont permis d'attaquer est la vérification de la formule de Moller ([3]), déterminant les sections efficaces différentielles en cas de choc d'un électron contre un autre, c'est-à-dire la formule établissant la loi de diffusion électronique à la base de la mécanique quantique relativiste.

La formule de Moller pour la section différentielle efficace peut être présentée sous la forme suivante:

$$\Phi(\theta)\,d\theta = \frac{\pi a^2}{\beta^4\gamma^2}\sin\alpha\,d\alpha\,(\gamma+1)\left[\frac{1}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2\left(1+\frac{4}{\sin^2\alpha}\right)\right]^{***}. \qquad (7)$$

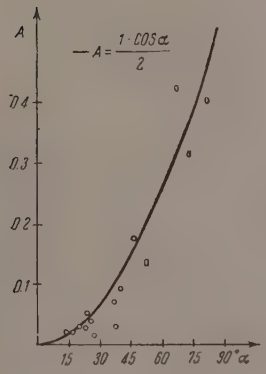


Fig. 3.

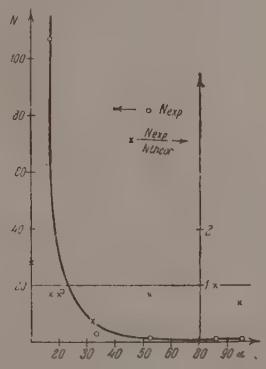


Fig. 4.

La section efficace, déterminant la probabilité de la transmission d'une énergie supérieure à une valeur donnée Q:

$$\sigma(Q) = \frac{2\pi a^2}{\beta^2(\gamma-1)}\left[(g-1)\lg\frac{1-A}{A}+\frac{1}{A}-\frac{A}{1-A}+g\left(\frac{1}{2}-A\right)-1\right]; \qquad (8)$$

a—le rayon classique de l'électron, $g=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2$.

---

* Les points marqués par les carrés et les petits cercles sont relatifs à deux séries d'observations différentes.

** Dans quelques cas exceptionnels (les petites valeurs de l'angle α) les erreurs relativement notables sont possibles à cause de diffusion éventuelle d'électron-ô lent au début de son trajet.

*** En tenant compte de l'échange quantique et de la valeur de masse relativiste (mais en négligeant la dépendance de cette masse de la vitesse et la «retardation»), on peut obtenir une formule «semi-classique»—formule de Rutherford dans le système du centre de gravité, qui a la forme suivante:

$$\Phi(\theta)\,d\theta = \frac{\pi a^2}{4\beta^4}\frac{(\gamma+1)^3}{\gamma^4}\sin\alpha\,d\alpha\left[\frac{1}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right].$$

En utilisant ces formules, il est possible de calculer les probabilités d'un processus de diffusion pour des intervalles différents ΔA, ou pour des intervaux correspondants $\Delta\alpha$.

On peut immédiatement comparer le résultat de ce calcul aux données expérimentales. Le tableau 1 et la courbe de fig. 4 en montrent le résultat. Les valeurs théoriques on été calculées d'après la formule (7) pour l'énergie moyenne $\overline{E}_0 = 1800$ ékV *.

Tableau 1

ΔA	$\bar{\alpha}$	Nombre des rayons-δ pour l'intervalle donné	
		Calculé	Observé
0.005 — 0.01	11°	82	110
0.01 — 0.02	15°	42	32
0.02 — 0.05	21°	21	17
0.05 — 0.1	32°	9	3
0.1 — 0.3	52°	4.8	4
0.3 — 0.4	72°	0.7	0.7
> 0.4	—	0.5	0.3
Total	—	160	166

Ce tableau comprend tous les cas d'apparition de rayons-δ (relatifs à la longueur totale de trajectoire de 210 m) dont le parcours surpasse 2.5 mm. Près de cette limite inférieure les parcours ont été appréciés d'une manière très approximative, de sorte que la valeur relative au premier intervalle peut être exposée à une erreur considérable.

Dans les limites des erreurs statistiques (relativement grandes) les valeurs expérimentales sont en accord avec les données théoriques.

La diffusion électronique paraît donc normale. On ne trouve pas dans ce cas-là des écarts quelque peu comparables à ce que nous avons signalé dans le cas de diffusion nucléaire dans l'azote.

L'Institut Physico-Technique.
Leningrad.

Manuscrit reçu
le 16. XI. 1938.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Bull. Acad. Sci., sér. phys., No 1—2, 78 (1938). [2] F. Champion, Proc. Roy. Soc., **137**, 688 (1932). [3] C. Moller, Ann. d. Phys., **14**, 531 (1932).

* En cas des chocs «lents» ($Q < 50$ ekV) il n'était pas possible de déterminer l'angle de diffusion de la particule primaire (θ_1). L'angle α dans ces cas-là a été évalué en utilisant l'équation (6) et la valeur du rapport A mesurée immédiatement. Q était évalué en mesurant le parcours de la particule-δ.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

PHYSIQUE

LE MÉCANISME ANORMAL DE DIFFUSION ET D'ABSORPTION DES RAYONS-BÉTA

Par D. SKOBELZYN

(Présenté par S. I. Wawilow, de l'Académie, le 15. XI. 1938)

Dans la Note précédente nous avons montré que les prévisions de la mécanique quantique relativiste concernant les rencontres des particules-β avec les électrons planétaires sont en bon accord avec l'expérience. En particulier, ces rencontres sont caractérisées par des relations que l'on déduit des équations du choc élastique.

Cependant on observe assez fréquemment des cas où un électron secondaire est produit dans des conditions qui se présentent tout à fait incompatibles avec le bilan de l'impulsion.

De pareils cas ont été constatés antérieurement par d'autres observateurs. L'importance de ce phénomène était cependant sous-estimée. Aussi l'interprétation de l'effet en question qui était suggérée ne paraît pas acceptable (1).

Maintes particularités caractéristiques permettent de distinguer très nettement ce mécanisme anormal de l'émission des rayons-δ. Dans la plupart des cas l'angle d'émission est b e a c o u p p l u s g r a n d que ce qui corresponderait à l'énergie d'une particule-δ expulsée conformément à l'équation du bilan de l'impulsion (il est à comparer, par exemple, le cas présenté par la fig. 1 de la Note précédente et celui de la fig. 1e de la Note présente).

Il ressort des mesures effectuées que l'angle m o y e n de diffusion surpasse 40°, tandis que d'après la valeur de l'énergie moyenne (~20 ekV) de rayons-δ il fallait s'attendre à un angle de diffusion électronique normal de l'ordre de 4° seulement. D'ailleurs, la direction d'émission ne semble pas être reliée d'une relation certaine avec le vecteur du choc, le vecteur présentant la différence des quantités de mouvement d'une particule-β après et avant le choc. Cette particularité est très clairement illustrée par des exemples suivants.

Fig. 1b—une fourche non-coplanaire. Le plan de la fourche forme un angle de 50° environ avec la direction du rayon-β primaire.

Fig. 1a et 1d—la direction d'émission fait un angle voisin à 180° avec la direction du trajet de la particule primaire.

Fig. 1c—l'angle d'émission surpasse 180° (si l'on convient de mesurer cet angle dans le sens contraire à la déviation de la particule provoquant le choc)* etc.

---

* En cas de ramifications normales cet angle est toujours inférieur à 90°.

Fig. 2 et le tableau suivant font connaître la distribution approximative des angles de l'émission de rayons-δ anormaux.

L'intervalle angulaire	0—90°	90—180°
Nombre des rayons-δ	14	8

Fig. 3 représente la répartition des angles (ϑ) correspondants de diffusion des rayons-β. Il est à noter que la répartition angulaire des rayons-δ anormaux semble presque uniforme. D'autre part, la répartition des directions (ϑ) des rayons-β diffusés ne se distingue pas sensiblement de celle qui caractérise (d'après les données de Stepanowa) la diffusion nucléaire anormale (en cas de l'azote)*. En tous les cas l'angle moyen ($\bar{\vartheta}$) de diffusion provoquée par des rencontres marquées par des branches anormales coïncide presque exactement avec la valeuer moyenne de t o u s les angles de diffusion nucléaire (ϑ):

$$\bar{\vartheta} = 47°, \Theta = 45°.$$

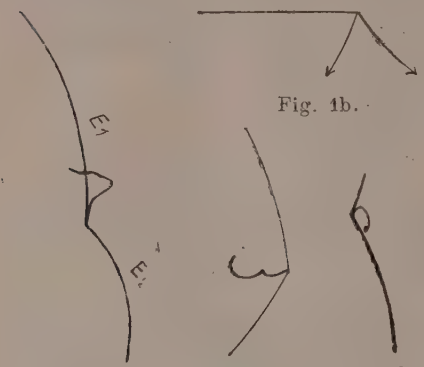


Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 1c. Fig. 1d.

Fig. 1e.

a) E_1=950 ekV E_2=350 ekV ϑ=50°
c) $E\sim$2500 ekV ϑ=60°
d) $E_2\sim$900 ekV ϑ=42°
e) $E\sim$2500 ekV ϑ=44°

Cette coïncidence est très remarquable. Il paraît certain que dans les deux cas nous avons affaire au même processus élémentaire**.

En total sur les 400 m du trajet électronique dans l'azote 22 rayons-δ anormaux furent enregistrés.

Le nombre des cas où la diffusion est accompagnée de l'apparition d'un électron anormal secondaire est de l'ordre de 10% du nombre total des processus élémentaires de diffusion où l'angle de diffusion surpasse 20°.

En moyen ce phénomène est observé une fois par 20 m de trajectoire électronique, ce qui correspond à une section efficace de l'ordre de 10^{-23} cm² (par atome de l'azote). Si l'on tient compte des cas seulement où les particules d'énergie surpassant 20 ekV sont expulsées, le nombre des cas anormaux sera de l'ordre de 10—20% du nombre des processus de diffusion électronique normale, c'est-à-dire du nombre des ramifications normales qui furent envisagées dans la Note précédente.

Il est à noter que dans 2 ou 3 cas (sur la longueur totale du trajet de 500—600 m dans l'azote) des rencontres ont été observées qui furent accompagnées par un changement considérable de direction de la particule primaire et par l'apparition de d e u x particules secondaires simultanées dont l'une porte une charge de signe indéterminé, son énergie étant tout à fait insignifiante(²).

La valeur de la section efficace ci-dessus indiquée est très élevée. Cette

---

* La courbe en pointillés de fig. 3 donne la distribution des angles correspondant à la courbe de diffusion nucléaire dans l'azote observée par Stepanowa.

** Le nombre des processus de diffusion, marqués par des branches anormales, dans la région des angles >40° est presque deux fois plus grand que celui des cas de diffusion élastique normale, évalué d'apres la formule de Mott.

valeur étant donnée, la possibilité d'une interprétation simple de ce phénomène est à considérer comme exclue: L'hypothèse que les particules secondaires observées sont dues à la conversion interne d'un photon de radiation de ralentissement est toutefois à écarter.

Quelques cas sont a priori incompatibles avec une pareille hypothèse. Fig. 1a, par exemple, présente un cas de diffusion accompagnée par une perte d'énergie de l'ordre de 600 ekV. Il n'est point possible de supposer que l'électron secondaire dont ce processus est accompagné soit expulsé par suite de l'absorption du photon créé lors du choc, car l'énergie de cet électron n'est que de l'ordre de 20—30 ekV. On peut aisément voir en outre que la section efficace pour ce mécanisme de conversion interne serait tout à fait insignifiante.

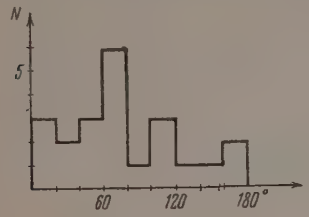


Fig. 2.

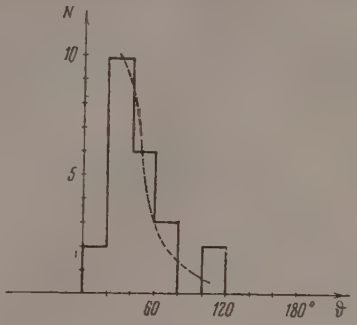


Fig. 3.

Il résulte des considérations générales que le rapport des probabilités de transmission d'une énergie certaine à l'électron secondaire, au détriment de la création d'un photon et de son absorption interne successive, à la probabilité de transmission de la même énergie par interaction directe est de l'ordre de $(\frac{Z}{137})^2$, c'est-à-dire de l'ordre de 0.0025, tandis que d'après nos données expérimentales on aurait dû s'attendre à une valeur de l'ordre 0.10—0.20.

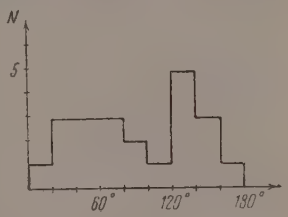


Fig. 4.

Il faut aussi tenir compte des observations suivantes. On peut admettre qu'il serait possible d'arriver à une appréciation satisfaisante de la probabilité de l'effet en multipliant la probabilité de l'émission du photon par le coefficient de conversion interne d'une radiation dipolaire dont la valeur est connue. Afin que ce calcul ne conduise pas à un résultat erroné, il est cependant à distinguer entre le coefficient de conversion interne dans le sens propre de cette notion et la probabilité de l'efet dit Auger, c'est-à-dire la probabilité de la transmission par interaction d i r e c t e de l'énergie d'excitation à l'électron planétaire.

En cas de rayons-γ mous et de rayons-X la probabilité de l'effet Auger peut être très élevée. Comme l'ont montré Mott et Taylor[3]), le coefficient d'absorption interne dans le sens restreint est cependant toujours trèis infé rieur à l'unité—de l'ordre d'un pour cent. C'est justement la valeus de ce dernier coefficient d'absoption interne qui intervient dans le calcul ci-dessus envisagé, tandis que la probabilité de transmission immédiate d'énergie, correspondant à l'effet Auger dans l'analogie envisagée, est la probabilité de la production d'un rayon-δ n o r m a l, qui est donnée par la formule de Moller.

Outre la divergence très notable entre la courbe expérimentale de la diffusion des rayons-β et la loi de Rutherford-Mott, que nous avons signalée antérieurement, l'anomalie décrite dans cet article est à rapprocher à l'effet anormal de la diffusion inélastique.

Les données sur ce dernier mécanisme, qui n'a nullement été prévu par la théorie usuelle, ont été publiées auparavant[4]. Dans ce qui suit nous allons souligner quelques particularités caractéristiques.

Fig. 4 fait connaître la distribution angulaire de particules diffusées avec une perte surpassant 90% de l'énergie initiale. Dans ce cas-là la répartition angulaire est aussi caractérisée par une isotropie presque parfaite.

$$\Delta E > 0.9\, E_0.$$

L'intervalle angulaire	0—90°	90—180°
Nombre des trajectoires	12	10
L'angle moyen	92°	

Si l'on tient compte de tous les cas où une perte surpassant 0.5 E_0 a lieu, la prépondérance de diffusion dans la région des petits angles devient bien prononcée:

$$\Delta E > 0.5\, E_0.$$

L'intervalle angulaire	0—90°	90—180°
Nombre des trajectoires	22	12

Au cours de l'année passée plusieurs travaux consacrés à l'étude du passage de rayons-β à travers de différents écrans placés à l'intérieur de la chambre de détente ont été publiés[5].

Les auteurs de tous ces travaux sont unanimes à conclure que la perte d'énergie observée surpasse très sensiblement la somme des pertes normales dues aux mécanismes d'ionisation et de radiation. L'importance de l'anomalie dépend pour chaque cas donné de la région spectrale de vitesse qui est étudiée.

La divergence entre la valeur moyenne des pertes d'énergie individuelles, mesurées par la méthode en question, et la valeur théorique est certainement due au fait que dans certains cas exceptionnels la particule traversant l'écran perd dans un acte élémentaire une partie considérable ou même presque la totalité de son énergie. Il suffit que ces cas constituent quelques pour cent pour que la valeur moyenne soit sensiblement aberrante de la valeur théorique.

Les auteurs des travaux récents se bornent parfois à publier les valeurs moyennes des pertes d'énergie en s'abstenant de donner la distribution statistique des pertes élémentaires.

Afin de rendre possible la comparaison des résultats obtenus, nous allons indiquer la valeur moyenne qui résulte de nos observations des pertes élémentaires dans le gaz (l'azote).

Sur la longueur totale de 210 m ($\sim$20 g/cm^2) de trajectoire d'électrons dont l'énergie est comprise entre 1000 et 3000 ekV (E_{eff}=1600 ekV) 11 rencontres de ce type ont été enregistrées.

$$\sum \Delta E = 15.9 \text{ MeV}.$$

La perte anormale relative a l'unité de longueur est donc:

$$-\left(\frac{\Delta E}{\Delta x}\right)_{an} = \frac{15.9}{20} = 0.8 \text{ MeVcm}^2/\text{g},$$

c'est-à-dire 50% de la valeur d'énergie dissipée par ionisation.

Il s'agit d'une appréciation par ordre de grandeur seulement. La valeur indiquée peut être sensiblement plus élevée que celle que l'on obtient dans les expériences avec les écrans absorbants dans la chambre Wilson, car dans ces dernières expériences les cas de l'absorption totale ne sont pas inclus.*

Les succès de l'application des équations fondamentales de la mécanique relativiste quantique (et de la théorie de Dirac en particulier) dans le vaste domaine de la physique nucléaire écartent actuellemet tout doute de la validité de ces équations (les faits exposés dans la Note précédente en donnent de nouvelles preuves). Il faut cependant attacher d'autant plus d'importance aux phénomènes qui ne sont pas du tout prévus par le schéma usuel des effets quantiques.

Les observations décrites ci-dessus démontrent l'existence de pareils phénomènes d'une manière tout à fait immédiate.

Institut Physico-Technique.
Leningrad.

Manuscrit reçu
le 16. XI. 1938.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] F. Champion, Proc. Roy. Soc., **153**, 353 (1936). [2] Bull. Acad. Sci., série phys., No 1—2, 88 (1938). [3] H. Taylor a. N. Mott, Proc. Roy. Soc., **142**, 215 (1933). [4] D. Skobelzyn et E. Stepanowa, Nat., **137**, 234 et 456 (1936); Bull. Acad. Sci., l. c. [5] L. Laslett a. D. Hurst, Phys. Rev., **52**, 1035 (1937); A. Ruhlig a. H. Crane, Phys. Rev., **53**, 618 (1938); B. Courtis, Phys. Rev., **53**, 986 (1938); R. Fowler a. J. Oppenheimer, ibid., **54**, 310 (1938).

* Si en effectuant le calcul on était convenu d'exclure les cas où une perte surpassant 90% de l'énergie initiale a lieu, la valeur moyenne serait réduite à 0.37 MeVcm²/g, ou 23% de la valeur théorique.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

PHYSICS

LONG-TIME RESISTANCE OF A VISCOUS MATERIAL HAVING ELASTICITY

By GEORGE M. IVANOV

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 9. XI. 1938)

According to Maxwell's theory of a viscous body having elasticity (1), the elastic strain and the rate of plastic flow increase without limit with an unlimited increase of stress:

$$[l]_{\sigma=\infty} = [k\sigma]_{\sigma=\infty} = \infty$$

and

$$\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{\sigma=\infty} = \left[\frac{1}{\eta}\sigma\right]_{\sigma=\infty} = \infty$$

where l—elastic strain (relative), λ—plastic strain (relative), σ—stress, t—time, k—coefficient of elasticity *, η—coefficient of viscosity.

In reality there is a certain limiting stress σ_{max}, producing a failure of the material while applied instantaneously **. The limiting value of the elastic strain is:

$$l_{max} = k\sigma_{max}. \tag{1}$$

The limiting value of the rate of plastic flow is correspondingly:

$$\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{\sigma\,max} = \frac{1}{\eta}\sigma_{max} \tag{2}$$

It is evident that if the above limiting values are surpassed, the formulae of the theory will not express the actual process of deformation. Therefore, in this sense, there are intervals of real values of corresponding variables, namely:

for the stress. . . . . $0 < \sigma < \sigma_{max}$

for the elastic strain . . . . . $0 < l < l_{max} = k\sigma_{max}$

for the rate of plastic flow . . . $0 < \frac{d\lambda}{dt} < \left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{\sigma\,max} = \frac{1}{\eta}\sigma_{max}$.

Integrating the Maxwell's differential equation (1)

$$\frac{dL}{dt} = k\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\sigma, \tag{3}$$

* For instance, for a net slip $k = \frac{1}{G}$, where G is the slip modulus.

** I. e. with a velocity of sound.

we shall obtain the expression of the total strain for $\sigma = \text{const} = \sigma_0$:

$$L = l + \frac{1}{\eta_1}\sigma_0 t. \tag{4}$$

The above expression gives also an unlimited increase of the value L with an unlimited increase of the time t:

$$[L]_{t=\infty} = \left[l + \frac{1}{\eta_1}\sigma_0 t \right]_{t=\infty} = \infty.$$

It is known, however, that the presence of a plastic flow which proceeds with a constant rate (creep strains) is an evidence that soon or late the failure of the material will occur ([2], [3]).

It means that the process of deformation under consideration cannot continue without any limit. In this case the duration of the effect of a constant stress to the moment of failure is determined by a finite value of the strain, that will be a limiting value at the given effective stress. Making use of the curve of long-time resistance which gives the relation between σ and t, we have previously obtained the limiting value of the plastic strain λ_m ([3]) as:

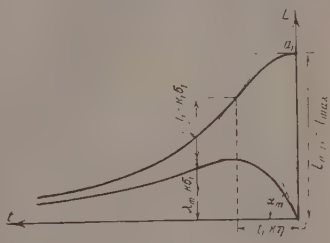


Fig. 1.

$$\lambda_m = \frac{1}{\eta_1}\sigma_{\max} t e^{-\frac{1}{k\eta}t}. \tag{5}$$

The curve of limiting plastic strains (5) (the bottom curve in Fig. 1) passes through the origin of the co-ordinate system. The tangent of the angle of inclination α_m of the tangential line to the curve at the origin is:

$$\operatorname{tg}\alpha_m = \left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_{t=0} = \frac{1}{\eta_1}\sigma_{\max},$$

i. e. equal to the limiting rate of plastic flow (2).

The curve (5) has a maximum with the value of the abscissa

$$t_1 = k\eta, \tag{6}$$

which presents the so-called time of relaxation. Hence, the physical meaning of the value, which has a great importance in the theory of Maxwell, can be explained as follows:

The time of relaxation presents the duration of a constant stress effect corresponding to the maximum value of the limiting plastic strain $\lambda_{\max}$.

The latter will be obtained substituting $t_1 = k\eta$ into equation (5):

$$\lambda_{\max} = k\frac{\sigma_{\max}}{e}. \tag{7}$$

Since $\frac{\sigma_{\max}}{e} = \sigma_1$, we have

$$\lambda_{\max} = k\sigma_1 = l_1, \tag{8}$$

i. e. the condition of maximum of the limiting plastic strain consists in its being equal to the elastic strain for a given stress.

Summing up the limiting plastic strain λ_m according to equation (5) with the corresponding value of the elastic strain, we shall get the total limiting strain as:

$$L_m = \sigma_{\max} e^{-\frac{1}{k\eta}t}\left(k + \frac{1}{\eta}t\right). \tag{9}$$

The initial ordinate of this curve is $k\sigma_{\max}$, i. e. equal to the value of the limiting plastic strain (1). The abscissa $t_1 = k\eta$ of the maximum limiting plastic strain $\lambda_{\max}$ has its corresponding point of inflexion on the given curve (9) (the upper curve in Fig. 1). The ordinate of this point

$$L_m = 2l_1, \tag{10}$$

i. e. equal to twice the elastic strain.

Thus, the curve λ_m divides the ordinate of the curve L_m in two for the value of the abscissa $t_1 = k\eta$, i. e. equal to the time of relaxation.

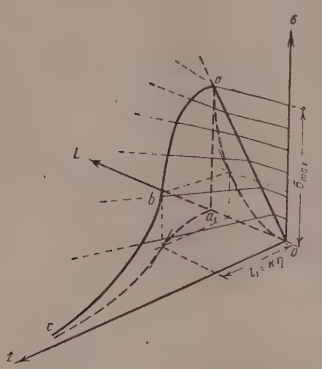


Fig. 2. Region of real values of variables on the surface $\sigma = \text{const}$.

The process of deformation under the action of a constant stress can be presented by a certain surface $\sigma = \text{const}$, within the co-ordinate space $L - t - \sigma$. The above surface will be obtained substituting $k\sigma$ for l in equation (4):

$$L = k\sigma + \frac{1}{\eta}\sigma t. \tag{11}$$

Its trace on the plane $L\sigma$ presents the straight line $L = k\sigma$ and that on the plane σt coincides with the axis ot.

On the surface $\sigma = \text{const}$ (11) (which, according to Maxwell's theory, is unlimited) the region of real values of variables will be separated by means of a certain three-dimensional curve of limiting strains (abc in Fig. 2), lying on the given surface. The projection of this curve on the plane Lt is given by equation (9). Consequently, the expression of the curve of limiting strains sought for will be found as a system of two equations:

$$L = k\sigma + \frac{1}{\eta}\sigma t \; ; \quad L = \sigma_{\max} e^{-\frac{1}{k\eta}t}\left(k + \frac{1}{\eta}t\right). \tag{12}$$

Eliminating t from these equations, we shall find its projection on a plane $L\sigma$ as follows:

$$L = k\sigma\left(1 + \ln\frac{\sigma_{\max}}{\sigma}\right). \tag{13}$$

The ordinate σ_1 of the point on the curve (12) for the value of the limiting strain $L_m = 2l_1$ is

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{\max}}{e}, \tag{14}$$

where e is the base of natural logarithms, which will be seen also from the determination of the relaxation time $t_1 = k\eta$, presenting the abscissa of the same point.

Integrating the differential equation (3) for $L = \text{const}$, we shall obtain the equation of relaxation:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{1}{k\eta}t}. \tag{15}$$

The process of relaxation of stress in the case of a constant strain may also be presented by a certain surface $L = \text{const}$, which will be obtained while substituting $\frac{1}{k}L$ for σ_0 in equation (15):

$$\sigma = \frac{1}{k} L e^{-\frac{1}{k\eta}t}. \tag{16}$$

The trace on the plane $L\sigma$ presents the straight line $\sigma = \frac{1}{k}L$ and that on the plane σt will coincide with the axis ot, i. e. both coincide with the trace on these planes of the surface $\sigma = \text{const}$ (11).

On the surface $L = \text{const}$ (16) (which, according to Maxwell's theory, is unlimited) the region of real values of variables will be separated by means of a curve (*ad* in Fig. 3) which evidently will be obtained at the intersection of the given surface with the plane

$$L = l_{\max} = k\sigma_{\max}. \tag{17}$$

The plane curve

$$\sigma = \sigma_{\max} e^{-\frac{1}{k\eta}t} \tag{18}$$

thus obtained is but a theoretical curve with which the actual curves of relaxation tend to coincide, when the value of the initial stress approaches to a limit equal to $\sigma_{\max}$. It is evident that practically this limit can never be reached, since an instantaneously application of $\sigma_{\max}$ calls forth a failure of the material. The curve (18) may be called a «theoretical curve of relaxation for the limiting stress $\sigma_{\max}$».

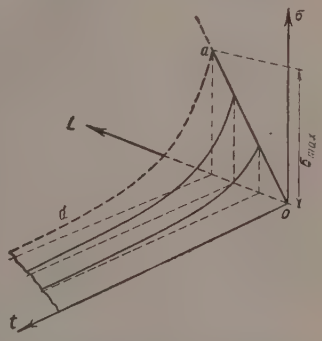


Fig. 3. Region of real values of variables on the surface $L = \text{const}$.

This curve will obtain a real meaning only in the case, where the duration of the constant stress effect and not the duration of maintaining in a state of constant strain (which corresponds to the relaxation process) will be considered as the abscissae of its points.

Then this curve will evidently present a relation between the value of the constant stress σ and the duration t of its action to the moment of failure, which, as it is known, is presented by a curve of long-time resistance.

Consequently, the curve of long-time resistance is the theoretical curve of relaxation for the limiting stress $\sigma_{\max}$, which we stated previously [3].

It is to be noted that this condition has a more general and essential importance since it does not depend on the shape of the mathematical expression for the process of relaxation.

Thus, the curve of long-time resistance is a conventional curve. Its setting up is based upon the curve of limiting strains (12), which determines the actual value of the breaking strain.

Central Institute for Industrial Building Research.
Moscow.

Received
26. IX. 1938.

REFERENCES

[1] J. C. Maxwell, Phil. Mag. (4), 35, 129 (1868). [2] George M. Ivanov, C. R. Acad. Sci. URSS, XIX, № 6—7, 549 (1938) [3] Ю. М. Иванов, ЖТФ, VIII, № 15, 1366 (1938).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

GEOPHYSICS

APPROXIMATE DETERMINATION OF THE HEAT-BALANCE OF THE WHITE SEA *

By V. V. TIMONOV and P. P. KUZMIN

(Communicated by O. J. Schmidt, Member of the Academy, 15. IX. 1938)

A detailed and full solution of the problem of the heat-balance of the White Sea is as yet impossible. All the necessary observations for that purpose have in fact been but recently started at the White Sea Methodical Station of the Hydrological Institute. Notwithstanding this, it was deemed opportune to determine the magnitudes of the principal components of the heat-balance of the White Sea from empirical formulae, were this but in a tentative way. Particularly outstanding interest belongs to finding the relative importance of the several component processes, as well as to disclosing the thermal effect of the water exchange of the White and the Barentz Seas.

Average monthly data were taken as the starting point of the investigation, being obtained principally from the observations of the littoral hydro-meteorological stations and posts located closest to the shore-line during the period of 1915—1930. As to purely naval observations taken from ships it was possible to calculate from them for the period of 1890—1935 only the temperature of the sea surface for the season June—September.

The absence of such data as would have been sufficient for determining the changes in the heat-content of the sea both by months and for a period of many years, as well as for separate years, was the reason for deciding upon examinations of an «average» year with a zero total of its heat-balance. This was done in much the same manner as had been accomplished formerly by W. W. Shouleikin(1).

As regards the calculations of the separate items of the heat regime, only certain specific features of the applied method will be mentioned (cf. also notes to Table 1).

Thus, in computing the radiation components, due account was taken of the albedo, assumed for the aggregate flow to be in accordance with Ångström's data, i. e. on the average of the order of 10% for open water and 50% for the portion of surface taken up by ice. It was possible to calculate the effective emission separately on the basis of Ångström's empiric formula, as well as the formula of the complete emission of a black body and Richardson's formula. For the determination of heat-losses in evaporation

* Reported at the Symposium of Geographical and Geophysical Group of the Academy of Sciences on the 30th of May, 1938. See a detailed account in the article of the same authors in «Proceedings of State Hydrological Institute», issue 8 (in print).

Table 1

Total Summary of the Results of Calculations of the Components of the Heat-Balance in sm. cal./cm² of the Surface of the Sea

Description	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
Coefficient of transparency of atmosphere	0.791	0.791	0.791	0.790	0.789	0.785	0.778	0.776	0.784	0.789	0.790	0.791	—
Possible sum of heat of direct solar radiation upon horizontal surface*	240	1 430	5 380	11 320	16 850	19 240	17 250	12 280	6 540	2 110	400	80	93 220
Direct and diffuse solar radiation**	120	760	3 010	6 450	9 270	11 380	10 700	6 750	3 470	1 010	190	40	53 150
Albedo of sea surface in terms of share of aggregate radiation flow	0.37	0.42	0.43	0.38	0.20	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.24	—
Direct and diffuse radiation of absorption by surface of sea	80	440	1 720	4 000	7 420	10 230	9 640	6 070	3 120	910	170	40	43 840
Effective emission	—3 380	—2 740	—2 980	—2 670	—2 360	—2 160	—3 160	—2 850	—2 730	—3 210	—3 360	—3 620	—35 220
Radiation balance	—3 300	—2 300	—1 260	1 330	5 060	8 070	6 480	3 220	390	—2 300	—3 190	—3 580	8 620
Heat of convection and evaporation	—3 010	—1 480	—1 670	—1 320	—1 260	—1 170	—3 070	—2 700	—2 190	—2 360	—2 670	—2 760	—25 660
Heat of ice-formation and ice-melting	2 060	1 250	880	—10	—2 250	—250	0	0	0	0	0	520	2 200
Heat-balance at surface of sea	*—4 250*	*—2 530*	*—2 050*	*0*	*1 550*	*6 650*	*3 410*	*520*	*—1 800*	*—4 660*	*—5 860*	*—5 820*	*—14 840*
Heat of run-off from mainland	0	0	10	20	710	840	500	310	180	30	— 20	— 10	2 570
Heat-balance with proper account taken of heat of rivers	*—4 250*	*—2 530*	*—2 040*	*20*	*2 260*	*7 490*	*3 910*	*830*	*—1 620*	*—4 630*	*—5 880*	*—5 830*	*—12 270*

* Calculated according to Ango for latitude 65°30′. Comparison of results with those of Shouleikin [(1), page 18] gave a divergence in the annual sum of only about 1.5%, while comparison with Millankovich's data gave no more than 5%.

** Diffuse radiation was taken as 15% of direct radiation, in the transition from possible sums to probable ones; cloudiness was computed according to Savinov with a coefficient of 0.70.

and convection a number of formulae were resorted to, among which were those applied for the computation of cooling ponds. The obtained sum together with radiation losses on emission was checked after Shouleikin's formulae (1).

Owing to absence of observations on the distribution and thickness of ice-floes, it was decided in the evaluation of the heat of ice processes to consider the growth of the thickness of ice-floes as equal to the growth noticed in the zone of shore-ice, while the growth of ice on open water bodies in winter (from January to April) was calculated for each month by Bydin's formula ($E_m = 11\sqrt{\Sigma T}$).

Further, the fact was noted that in virtue of a continuous drive of ice through the White Sea Sound only a certain portion of the ice formed during winter is apt to thaw within the area of the sea under examination, in result of which the sea «saves up» a certain amount of heat. The volume of ice driven out through the Sound was evaluated very roughly on the basis of wind resultants recorded on Sosnovetz Island during 1916—1930 and also on the ground of desultory data on the velocity of the constant current. The figure in question came to about 15 km^3, which constitutes about $^2/_5$ of the whole amount of ice formed in the sea.

The results of the calculations are summed up in Table 1. The predominant influence on the course of seasonal variations in the heat-balance on the surface of the sea has a markedly fluctuating radiation balance. The period of the immediate accumulation of solar heat lasts from the beginning of April till the middle of September with a maximum in July. The maximum of losses takes place in November and December, while the bulk of the sea is still free from ice.

In the annual total, losses of heat through the surface markedly exceed the gain, the yearly total of the heat-balance on the surface of the sea being negative and constituting about 14 840 sm. cal. per cm^2.

Only about 2570 sm. cal. per cm^2 is compensated by heat derived out of the run-off from the mainland, while the uncompensated for margin, equalling approximately 12 270 sm. cal. per cm^2, has to be regarded as the annual total of the only item remaining unaccounted for—the heat-balance of water exchange with the Barentz Sea. Accordingly, notwithstanding all the inaccuracy of the magnitudes obtained, as well as the inexactitude of the whole computation, the following important fact may be considered as proved: **the water exchange of the White Sea with the Barentz Sea heats the latter appreciably.**

We also succeeded in tracing tentatively the most probable course of changes in the heat of the water exchange by months. For this purpose on the basis of deep-water observations, effected by the White Sea Station of the Hydrological Institute during 1932—1935, and the data obtained by K. M. Deriugin (2), the moments of reaching the maximum and minimum of heat-content of the active layer of the White Sea* were approximately determined, whereby determination was also made of the moment when the full heat-balance of the sea equals zero. Hence it was easy to find the magnitudes of the heats of water exchange for the aforesaid moments. A curve suppositively plotted according to these magnitudes showed with a high degree of probability that in result of water exchange the White Sea undergoes heating in autumn and in early winter, approximately from September till December, while at the end of winter and in spring (from February till June) it loses heat. This important though hitherto

* In the first part of October and in the first part of May.

only surmised conclusion stands in satisfactory agreement with existing conception on the hydrological regime of the White Sea Sound.

The probable curve for the course of the water exchange heat-balance was also made use of for obtaining the probable curve of the total balance and the curve of changes in the sea heat-content, and it was also used for determining roughly the approximate range of fluctuations of the mean temperature of the active layer. The latter was found to be perfectly plausible.

Finally, the plotted probable curve of the heat-balance of water exchange afforded the possibility of outlining—though perhaps again in a fairly rough way—the income and expenditure parts of the balance amounting respectively to about +18 000 and —6 000 sm. cal. per cm². In result of this the possibility was provided for comparing all the principal items of the heat-balance of the White Sea and approximately describing their relative signi-

Table 2

Annual Sum Totals and Particular Annual Heat-Balances of All the Components of the Heat-Balance of the White Sea

Gain of heat	sm. cal./cm²	%	Expenditure of heat	sm. cal./cm²	%
Aggregate solar radiation absorbed by sea...	+ 43 840	63	Effective emission . .	— 35 220	50
			Heat of convection and evaporation . .	— 25 660	37
Income of heat in result of water exchange	about + 18 270	26	Losses of heat in result of water exchange	about — 6 000	9
Heat of ice-formation .	+ 5 080	7	Heat of ice-melting . .	— 2 880	4
Influx of heat from rivers	+ 2 600	4	Cooling brought in by rivers	— 30	—
Total gain	about + 69 790	100	Total losses	about — 69 790	100

Table 3

Positive balance	Sm. cal./cm²	%	Negative balance	Sm. cal./cm²	%
Balance of heat of water exchange	12 270	48	Balance of convection heat and evaporation	25 660	100
Balance of radiation processes (aggregate absorbed radiation minus emission) . . .	8 620	33			
Balance of heating effect of run-off from mainland	2 570	10			
Balance of processes of ice-formation, ice-drive and ice-melting . .	2 200	9			
	25 660	100		25 660	100

ficance (Table 2). The latter is brought out still most forcibly upon comparison of the result of such processes, as are geophysically undivisible (Table 3).

Careful analysis of the conclusions obtained permitted to deduce a number of important hydrological results, all of them hinging on the fact that the heating effect of water exchange is considerable: 1) depending upon the season, it is either the inflowing or the outflowing current of the White Sea that becomes periodically more powerful; 2) the total amount of the bulks of water being exchanged through the White Sea Sound is considerable, and consequently the renewal of the waters of the White Sea is more or less intensive; 3) one of the essential reasons for the many-year changes in the thermal condition of the White Sea consists presumably in changes in the thermal condition of the waters of the south-western part of the Barentz Sea. All these conclusions are in good agreement with the peculiarities of the hydrological and hydrochemical regime of the sea.

It is self-evident that the development and greater precision of the heat-balance will open up extensive and highly valuable possibilities for practical purposes both in the field of the methods of early thermal and ice forecasts and in the province of a thorough-going causal analysis of the regime of our seas. All this calls for the development of stationary observations upon the seas of the Union. In particular, as regards the White Sea, there is, in the first place, need in: 1) an intensification of observations on all the elements of the heat-balance; 2) conducting regular seasonal hydrological cuts and surveys and greater stress to be laid on littoral observations; 3) organization of observations on the water and ice exchange in the White Sea Sound.

State Hydrological Institute.
Leningrad.

Received
29. X. 1938.

REFERENCES

[1] В. В. Шулейкин, Тр. Таймыр. гидрограф. экспед. (1935). [2] К. М. Дерюгин, Исследования морей СССР, вып. 7—8 (1928).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

GEOPHYSICS

HEAT-TRANSFER FROM THE SEA INTO THE AIR BY EVAPORATION AND CONVECTION

By P. P. KUZMIN

(Communicated by O. J. Schmidt, Member of the Academy, 15.IX.1938)

Heat-Transfer by Evaporation. Heat-transfer by evaporation is determined from relation $W_u = LF$, where L is latent heat of evaporation and F is the layer of the water evaporated.

Sverdrup (1) was the first who in 1936 deduced a formula for calculating evaporation from the surface of the sea based on the theory of turbulent intermixing:

$$F = \frac{0.216\,(E_w - e_z)\,v_z}{0.0164\left[\ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right)\right]^2 + v_z \Delta z}, \qquad (1)$$

where F is evaporation in mm/day; E_w — maximum vapour elasticity at temperature of surface of water, in mm; e_z — absolute humidity at elevation z from surface of sea, in mm; v_z — velocity of wind at elevation z, in m/sec.; z_0 — parameter of surge, in cm, and Δz — thickness of boundary layer, in cm.

Determining the parameter of the surge by the maximum height of wave h from relation $z_0 = \varepsilon h$, where $\varepsilon = \frac{1}{40}$, for various wind velocities in accordance with the following table:

Table 1

Wind-velocity (m/sec) v	1	2	3	4	5	6
Parameter of surge z_0	0.25	0.75	1.25	2.00	2.50	3.50

and assuming the thickness of the boundary layer to be in accordance with data obtained from observations on Spitzbergen, to wit: $\Delta z = 0.13$ cm = const, Sverdrup calculated evaporation from surface of Ocean by formula (1). The result of the calculations elfected by Sverdrup almost coincided with the data on evaporation determined in another way by Meinardus.

Taking this into due consideration, we made use for similar purposes of a rich and sufficiently accurate material of observations taken on Lake Sevan, the whole set of observations being reduced to a many year series (2), whereupon we calculated the evaporation from the surface of Lake Sevan on the basis of this material (Table 2).

The calculations were carried out after the following preliminary transformations:

1. Formula (1) had to be somewhat modified and represented as follows:

$$F = \frac{0.216\,(E_w - e_{z_2})\,\varphi_{z_1}}{0.000114\,P \cdot \log\left(\frac{z_1+z_0}{z_0}\right)\log\left(\frac{z_2+z_0}{z_0}\right) + \varphi_{z_1}\Delta z}, \qquad (2)$$

where z_1 is the height of the level of observations on wind velocity; z_2 — height of the level of observations on absolute humidity; P — air pressure in mm.

2. On the basis of formulae (3), (7) and (9) of Sverdrup's work [3] it was found possible to express approximately the thickness of the boundary layer by the following equality:

$$\Delta z' = 0.0863\,\log\left(\frac{z_1+z_0}{z_0}\right)\log\left(\frac{z_2+z_0}{z_0}\right)\frac{(E_w - e_0)}{(e_0 - e_{z_2})\,\varphi_{z_1}}, \qquad (3)$$

and with greater precision:

$$\Delta z = 0.0863\,\log\left(\frac{z_1+z_0}{z_0}\right)\log\left(\frac{z_2+z_0}{z_0+\Delta z'}\right)\frac{(E_w - e_0)}{(e_0 - e_{z_2})\,\varphi_{z_1}}, \qquad (4)$$

where e_0 is absolute humidity at the upper frontier of the boundary layer in mm, or, taking into account that the thickness of this layer is insignificant, it is the absolute humidity at height 0 from surface of water.

In conformity with observational data on Lake Sevan ($z_1 = 900$, $z_2 = 10$, $\varphi_{z_1} = 3.5$, $E_w = 9.54$, $e_0 = 7.53$ and $e_{z_2} = 6.93$) we obtained from formula (3) approximately $\Delta z' = 0.19$ and from formula (4) ultimately $\Delta z = 0.18$. The parameter of the surge in accordance with Table 2 was assumed to be equal to $z_0 = 1.7$. The magnitudes of evaporation from the surface of Lake Sevan calculated from formula (2) were found to be in satisfactory agreement with observational evidence (Table 2).

Table 2

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Year
According to observations on Lake Sevan [(2), page 69]	$E_w - e_{10}$	2.8	2.1	1.5	0.1	0	1.5	2.3	3.9	4.9	4.9	3.8	3.3	2.6
	φ_{900}	3.4	4.5	4.0	3.2	2.5	2.9	3.7	2.8	3.4	3.3	3.6	4.3	3.5
	F_h	2.6	2.1	1.4	0.1	0	1.3	2.2	3.3	4.5	4.5	3.5	3.3	2.4
Calculated by formula (2)	F_b	2.7	2.1	1.5	0.1	0	1.4	2.2	3.7	4.7	4.6	3.7	3.3	2.5

Heat-Transfer by Convection. Further we paid due attention to the relationship existing between the process of evaporation and the process of heat-transmission from water to air.

Between loss of heat by convection W_k and loss of heat by evaporation W_u there is found to exist a strictly defined relation [5]

$$\frac{W_k}{W_u} = 0.46 \frac{(t_w - t_z)}{(E_w - e_z)} \frac{P}{760}, \tag{5}$$

where t_w is temperature of water surface, t_z — temperature of air at elevation z and P — pressure of air in mm.

It is well known that evaporation depends upon velocity of wind; accordingly, relation (5) where this velocity is absent is indicative of the fact that evaporation and heat-transfer by convection equally depend upon the conditions of turbulent intermixing, and are to be determined by one and the same function of wind velocity.

We, therefore, assumed that in analogy with formula (1), expressive of the layer of evaporated water, heat-transfer by convection may be represented in the terms of the following formula:

$$W_k = \frac{\lambda (t_w - t_{z_2}) \varphi_{z_1}}{\frac{\lambda}{\rho k_0^2 \sigma} \ln\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right) \ln\left(\frac{z_2 + z_0}{z_0}\right) + \varphi_{z_1} \Delta z}, \tag{6}$$

where λ is molecular conductivity ($\lambda = 0.56 \times 10^{-4}$); σ — specific heat capacity of air ($\sigma = 0.238$); ρ — density of air ($\rho = 0.129 \times 10^{-2}$), and k_0 — non-dimensional constant ($k_0 = 0.38$).

The deduction of this formula was based upon the assumption that: 1) next to the surface there exists a boundary layer within whose ranges heat-transmission is brought about on account of molecular conductivity:

$$W_k' = \frac{\lambda (t_0 - t_w)}{\Delta z}; \tag{7}$$

2) above the boundary layer heat-transfer is due to turbulent conductivity:

$$W_k = -A\sigma \frac{dt}{dz}; \tag{8}$$

3) the coefficient of turbulent intermixing A depends upon altitude above sea and upon parameter of surge z_0 which, according to Prandtl is expressed as follows:

$$A = \rho k_0^2 (z + z_0) \frac{\varphi_{z_1}}{\ln\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)}; \tag{9}$$

4) the temperature of air is in linear dependence upon the logarithm of elevation $t = t_0 - c \cdot \ln\left(\frac{z + z_0}{z_0}\right)$, where t_0 is temperature of air at elevation 0, or $t_{z_2} = (t_0 - t_w) + t_w - c \cdot \ln\left(\frac{z_2 + z_0}{z_0}\right)$ and

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{(t_0 - t_w) + (t_w - t_{s_2})}{(z + z_0) \ln\left(\frac{z_2 + z_0}{z_0}\right)}; \tag{10}$$

5) the heat which is transmitted from water to air is always led through the boundary layer, wherefore

$$W_k' = W_k. \tag{11}$$

Formula (6) may be represented in a form which is practically convenient for calculation:

$$W_k = \frac{0.0034\,(t_w - t_{z_2})\,v_{z_1}}{0.067 \log\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right) \log\left(\frac{z_2 + z_0}{z_0}\right) + v_{z_1}\,\Delta z}. \qquad (12)$$

But should wind velocity and air temperature be measured at one and the same elevation from the surface, we shall have then:

$$W_k = \frac{0.0034\,(t_w - t_z)\,v_z}{0.067 \left[\log\left(\frac{z + z_0}{z_0}\right)\right]^2 + v_z\,\Delta z}, \qquad (13)$$

where heat-transfer is expressed in sm. cal./cm² min., wind velocity in m/sec., temperature in °C and elevation in cm.

Laying no claim to an accuracy exceeding that of ± 0.01 cal., we calculated the heat-transfer for Lake Sevan according to formula (12) and obtained as an average for the year a heat-transfer of 0.04 cal/cm² min. In accordance with the preceding calculations we assumed $z_0 = 1.7$ and $\Delta z = 0.18$, while on the basis of observational data on Lake Sevan we found $z_2 = 200$, $z_1 = 990$, $t_w = 9.5$, $t_{z_2} = 6.3$ and $v_{z_1} = 3.5$.

This result of our calculations is checked in the following way. In accordance with equality (5) the ratio of heat-transfer by convection to heat-transfer by evaporation will on the basis of observational data obtained at the station on Sevan Island ($P = 605$ mm, $E_w = 9.54$ mm, $e_z = 5.9$ mm, $t_w = 9.5$ and $t_z = 5.5$) be found equal to 0.41.

According to our calculations of heat-transfer by convection after formula (12) and also of heat-transfer by evaporation after formula (2), we obtain ratio $\frac{W_k}{W_u} = 0.40$, which stands in good agreement with the just obtained ratio calculated after equality (5).

In 1936 Rossby [5] pointed to the following two important facts:

1. In the case of rapidly changing conditions of surge, parameter z_0 is apt to reach very high magnitudes (up to 20 cm), but with moderately steady winds the surface of the sea, as it were, adapts itself in such a way as to provide air with the possibility of travelling over it in a most sparing manner, and the parameter of surge remains constant $z_0 = 0.6$ cm.

2. There are on record cases where vortices reach the surface of water and when the turbulent conductivity has a clearly expressed magnitude on the very surface.

These interesting and important facts present, however, as yet but a subject for further investigations. Brought to their true end, they are certainly destined to afford the possibility of raising the degree of accuracy of the determination of heat-transfer. Within the limits of accuracy accepted here these facts fail, however, to have any appreciable effect upon the results obtained.

State Hydrological Institute.

Received
29.X.1938.

REFERENCES

[1] H. U. Sverdrup, Ann. d. Hydr. u. Marit. Meteor., H. 11, 41 (1936). [2] В. К. Давыдов, Матер. по исслед. оз. Севан и его бассейна, ч. II, вып. 2 (1935). [3] H. U. Sverdrup, Journ. of Marine Research, 1, № 1 (1937—38). [4] Bowen, Phys. Rev., 2nd ser., 27, № 6 (1926). [5] Rossby, Papers in Phys. Oceanography and Meteorology, IV, № 3 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

GEOLOGY

A CONTRIBUTION TO PALEOGEOGRAPHY OF NORTHERN CAUCASUS DURING THE UPPER MESOZOIC AND LOWER PALEOGENE

By V. E. KHAIN

(Communicated by A. A. Borissiak, Member of the Academy, 3. XI. 1938)

Whereas the mountain massifs of the Main Caucasus Range and of Little Caucasus exhibit appreciable development of Jurassic and Cretaceous deposits, the vast area of the Kura depression eastward of Tbilissi is distinguished by no outcrops of sediments earlier than Oligocene*. Therefore the geological history of the Kura valley for a corresponding period of time may be estimated in the light of an interpolation of data derived from the southern slope of the Main Ridge and the northern outskirts of Little Caucasus.

As early as in 1932, the composition of the Upper Cretaceous and Eocene deposits in the section of the Georgian Military Road prompted V. P. Renngarten (1) to suggest that during the Cretaceous and the Lower Paleogene the territory of the Kura depression had been a land surface, serving as a source of debris supplied from the south to the geosyncline of the Main Caucasus Range. Ever since that time the idea of ancient «Kura land» has been safely established in Caucasian literature. N. B. Vassoevich (2), having completed investigations in the Kakhetia upland, arrived at the conclusion that at the time of deposition of sediments the Kakhetia zone, isolated by him, had been lying in immediate proximity of the shore-line of the ancient land. The author of the present communication (3), after explorations in the Lagich mountains, west of the peak Shemakha, found his contention to be true in regard to the eastern part of the zone on the southern slope. Finally, V. V. Beloussov (4,5,6), having examined the geological history of the Main Caucasus Range in its entity, decided that the Kura land must have been the principal source of supply for the eastern portion of the Flysch geosyncline of Main Caucasus during a considerable part of the Mesozoic and Paleogene. The fact that Upper Jurassic limestones are becoming more arenaceous in the region of Kirovabad was considered as evidence, that the land in question had been supplying with terrigenous material the seas, which had overflown the Kirovabad zone of Little Caucasus.

The correlations between the northern slope of Little Caucasus, the Kura valley and the southern slope of the Main Ridge are presented by V. V. Beloussov in a somewhat different aspect for different geological periods.

* Outcroppings of the Upper Jurassic limestones and ignigenous Dogger at the Ziteli-Zkharo («Krasnye Kolodzy») and in the Byurgutu ridge present an exception which is rather important in the understanding of the structure and history of the depression.

Thus, for some periods it has been assumed that what was to become later the Kura depression, taken together with Little Caucasus, had been part of one vast land surface, i. e. presenting its northern margin(Lower Cretaceous). During other periods the Kura land had presumably been covered by sea and the shore pushed back to the Kirovabad foothills of Little Caucasus (Lower and Middle Jurassic, Lower Paleogene—era of foraminiferal series). Finally, according to a third conjecture, the Kura land had been an independent erosional province, flanked on the north by a Flysch basin, and on the south by sediments from the Kirovabad zone of Little Caucasus (Upper Jurassic, Upper Cretaceous).

However, certain data obtained by me during explorations in 1936—37 in the north-eastern part of Little Caucasus and the perusal of material of other explorers have convinced me that the established notions are erroneous.

Thus, concerning the Upper Cretaceous, it appears that the coast of the sea, which had drowned the Kirovabad zone*, had been situated not on the north, in the region of the Kura plain, but on the south, within the boundaries of the Kirovabad zone itself. This is suggested by the correlation of the transgressive horizons Cr_2 with the underlying sediments. Thus, when moving southward from the village Erkech on the river Buzluk-chai toward the village V. Agdjakand on the river Kara-chai, one may observe a gradual transition of the basal parts of the Santonian limestones from deposits of the Coniacian stage to strata of the Turonian and then Cenomanian, down to the base of the latter; in the region of V. Agdjakand, according to V. P. Renngarten, the Cenomanian cuts off first the Albian, further the Aptian, and ultimately reclines on the Upper Jurassic.

Sediments of Maastricht, which in the main zone of development of the Upper Cretaceous conformably succeed the Campanian stage, are at the village Gyulistan, which is situated to the south of that main zone of the region, transgressively overlying the Cenomanian (or Lower Turonian) formations.

Absolutely analogous relations seem to hold good for the southern part of the Kirovabad zone, to which I shall apply the data furnished by K. N. Paffenholtz ([7],[8]). The Cenomanian, which is quite fully represented along the southern slope of the Dali-dag ridge (inter-riverine area between Astafachai and Debeda-chai), is absent on the northern slope of the ridge, having been cut off by the transgressive Senonian. In the northern part of the same region the Senonian, in the course of its southward movement, is cutting off sediments of the Cenomanian and Turonian, reclining at Idjevan directly upon the rocks of the Upper Jurassic. The Senonian limestones, developed along the northern shore of lake Sevan, are notably arenaceous. Terrigenous material could not have possibly been supplied from the south, since outcrops of the Senonian continue over there, being repeatedly involved in folding. Consequently, its source must have been in the north within the area of the Kirovabad zone.

The above facts testify that during the Upper Cretaceous** in the central part of the Kirovabad zone had stretched the cordillera, an archipelago of islands, the latter having been the source of terrigenous material carried away southward into the lake Sevan basin, as well as northward to the area of the Kirovabad foothills of Little Caucasus. Both facies and thicknesses

---

* The Kirovabad zone, in my estimation, comprises part of Little Caucasus, lying to the north of Murov-dag (northern Gokcha) thrust of Paffenholtz.

** Most distinctly this may apply to the Senonian, somewhat less—in relation to earlier stages Cr_2.

indicate that this northern flexure was deepening as it extended farther north, i..e. exactly in the direction, where the hypothetical Kura land was supposed to be lying.

Turning to the Upper Jurassic, let us note that according to data provided by K. N. Paffenholtz, as well as mine, the Upper Jurassic limestones of the Kirovabad zone thin out to the north and become arenaceous, while there appear alabaster lenses, fragments of flintified trees, etc. All this is conclusive evidence that close at hand, in the north, must have been lying land. However, it would be wrong to maintain that it had extended over the entire area of the Kura depression, and that it had been the source of supply for the Flysch trough of the Main Caucasus Range, because on the territory of the depression proper are cropping out pure zoogene limestones of the Krasnokolodzky massif and Byurgutu ridge(9), and at the foot of the southern slope between the Nukha mountain and Vandam village similar limestones are arranged in a powerful anticlinal uplift (10).

Thus, for the Upper Jurassic two independent cordilleras are traceable—one in the northern part of the Kirovabad zone, where its axis must have been lying in a more northerly direction than the one traceable for the Upper Cretaceous, and the other cordillera in the southern part of the zone on the southern slope of the Main Caucasus Range.

During the Paleogene, according to V. V. Beloussov's scheme, the foraminiferal transgression must have been extending over the entire Kura depression, and the area of the northern slopes of the Little Caucasus Range must have been the source of terrigenous material. This assertion conflicts with the fact that the sediments of the foraminiferal series of the northern extremity of Little Caucasus, in the inter-riverine area explored by me, between Gandja-chai and Terter, contain far less terrigenous fraction than their Flysch analogues in the zone along the southern slope of the Main Caucasus Range. The latter could not have been fed from any other source, but the one lying immediately at the southern border of the Flysch flexure.

In summing up the above, we arrive at the conclusion that the most probable paleogeographic (and paleotectonic) reconstruction for the period, beginning from Malm up to and including the beginning of the Maikop age, may be the following: the trough of the Main Caucasian geosyncline was bounded from the south by a powerful but narrow cordillera, geanticline, which may be named Kakhetia-Lagich; to the south of this cordillera was lying the Kura geosyncline, occupying nearly the entire Kura depression of to-day and the northern outskirts of Little Caucasus; further down south was stretching the Kirovabad cordillera (geanticline), separating the Kura geosyncline from the Sevan geosyncline. The western continuation of the Kakhetia-Lagich cordillera is exactly the land, of which traces are, according to V. V. Beloussov, concealed at the present time beneath the overthrust in the western part of the southern slope of the Main Range, the remnant being represented by the Akhtzu ridge in Abkhazia.

It seems to me that the scheme outlined above is in perfect agreement with all facts known up to date.

It should be further noted, that if one assumes that the Mesozoic Kura geosyncline had presumably existed, northern Transcaucasia appears to possess identical bilateral symmetry with the one peculiar to the Main Caucasus Range. The point is that on both flanks of the Dzirulsk massif, which plays a part similar to the one of the Voroshilov (Stavropol) uplift and rise of the axis of the Main Caucasus Range at the Elbrouz meridian, two geosynclines are displayed, and it looks as if the Kura geosyncline is a perfect reflection of the Abkhazian. An interpolation of the sections of the Kirovabad zone of Little Caucasus and the Kakhetia-Vandam zone of the Main Caucasus

Range shows, that within the limits of the Kura geosyncline the structure of the Mesozoic section may be taken to be similar to the section of Lechkhum and Abkhazia, and one might even expect to find there a development of the Urgonian facies of the Lower Cretaceous.

Recent unpublished data seem to support the above assumption. Thus, according to a statement of N. B. Vassoevich, while in the northern part of the Kakhetia zone facies bear the character of «wild Flysch», within the southern margin of that zone they are gradually becoming less arenaceous. This is suggestive of the presence of the cordillera directly in the Kakhetia zone proper, namely in the southern part of it. There is an analogous situation in the eastern part of the Kakhetia-Vandam zone in the region of Nukha-Vandam-Lagich. According to V. V. Weber and N. B. Vassoevich, there is traceable the existence of as many as two independent zones of uplift, cordilleras, with their trains of coarse clastic material.

In closing, I am pleased to express my gratitude to N. B. Vassoevich, V. V. Weber and V. P. Renngarten for having kindly communicated to me their unpublished observations.

«Aznefterazvedka» Trust.
Geological Survey Bureau.
Baku.

Received
3.XI.1938.

REFERENCES

[1] В. П. Ренгартен, Геолог. очерк района Военно-Грузинской дороги (1932). [2] Н. Б. Вассоевич, Некоторые результаты геолог. исслед. в Горной Кахетии (1934). [3] В. Е. Хаин, Опыт сопоставления меловых отложений южного склона Б. Кавказа (1937). [4] В. В. Белоусов, Большой Кавказ, ч. I (1938). [5] В. В. Белоусов, Проблемы советской геологии, № 1 (1938). [6] В. В. Белоусов, Проблемы советской геологии, № 4 (1938). [7] К. Н. Паффенгольц, Армутлы-Кульп (1934). [8] К. Н. Паффенгольц, Бассейн озера Гокча (Севан) (1934). [9] В. А. Горин, Аз. нефт. хоз-во, № 8—9 (1937). [10] В. В. Вебер, От Вандама до Нухи (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

PLANT PHYSIOLOGY

EFFECT OF GROWTH SUBSTANCES UPON ROOTING RESPONSE OF CUTTINGS FROM PINE AND OTHER WOODY SPECIES

By D. A. KOMISSAROV

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 10. XI. 1938)

Growth substances (β-indolylacetic acid, α-naphtaleneacetic acid and others) have been found by a number of workers [1,2,4—8,11,13] to stimulate the rooting response of cuttings from many trees and shrubs. The effectiveness of their action, however, as experiments by Komissarov [7,8], Scholz [5]. Laibach [4], Maximov and Gocholashvili [11], and others have shown, varies according to the species of the plant given. In our experiments of 1937, for instance, the cuttings of the common pine (*Pinus silvestris*), both controls and those treated with growth substances, gave no rooting response whatever. Still we should not be hasty to conclude from this disappointing experience that such difficult species with regard to rooting, as pine, for instance, is, will be absolutely unable to respond positively to the action of growth substances. As is known, the rooting response of cuttings from any plant species is greatly depending both upon the conditions, under which the cuttings are taken, and the physiological state of the shoots from which they are made. It is known again that the response of the plants to the action of growth substances varies with the species concerned, the type of organs and tissues taken, as well as their condition, and, finally, with the dose and concentration of the growth substance applied [9,12,14]. On that account we should expect that such factors, as plant's biological peculiarities, conditions of its habitat and of the very operation to prepare cuttings, will also greatly affect the ability of growth substances to induce root-formation in cuttings. This had partly been substantiated by our former experiments. performed in 1935—1937 [8]

As concerns the preparation of cuttings, none conditions but only optimum ones are indispensable for the growth substances to display their high efficiency. These conditions in our experiments of 1937 seem to have been unfavourable for a positive effect. The experiments on pine to be described here were carried on in the year 1938 under different conditions, and they have been crowned with positive results.

In treating the cuttings we made use of the following growth substances: β-indolylacetic acid, α-naphtaleneacetic acid and the potassium salt of the latter. According to the data of Zimmermann and Hitchcock [6], potassium and sodium salts of α-naphthaleneacetic acid proved to be as active as the acid itself, but more readily soluble in water and less toxic in high concentrations.

β-indolylacetic acid was supplied by C. A. Karyalo (All-Union Institute of Plant Industry) and, in small amounts, prepared by myself after the method of Jackson and Manske (3). α-naphtaleneacetic acid and its potassium salt were received from B. A. Poray-Koshitz, of the Leningrad Chemico-Technological Institute. The method to treat the cuttings with growth substances was the same as described in (8).

The cuttings, 7—9 cm long, cut from not lignified shoots of plants whose age was 3 and 20—25 years, were kept in water for 2—3 hours. We observed thereby an abundant exudation of resins on the surface of the cut. Then the cuttings were curtailed at their basal end by 0.5—1 mm. After this operation the clean surface of the cut imbibed water solutions of growth substances intensively. Concentration of the solutions ranged between 0.005 and 0.020%. Time of treatment between 6 and 48 hours. The cuttings treated were planted in hotbeds of cool (20—25° C) and temperate (30—35° C) type.

The rooting medium consisted in pure sand or a mixture of sand and reduced sphagnum peat. The hotbed glass was daubed on the outside with slaked lime.

As seen from the short tables annexed, the rooting response of pine cuttings is materially stimulated by growth substances. Still the effectiveness of the latter varies considerably with the conditions of the experiment and above all with the age of plants and the temperature in the hotbed (Table 1).

Table 1

Material of treatment	Pine cuttings rooted in %				Cuttings rooted in %		
	Age of plants				Date of cutting		
	3 years		20—25 years				
	Duration of treatment in hours	t° in hotbed 30—35°	t° in hotbed 20—25°	t° in hotbed 30—35°	t° in hotbed 20—25°	Duration of treatment in hours	20. VI	5—12. VI	20. VII
Control	—	0	0	0	0	—	0	0	0
Water	24	0	0	0	0	24	0	0	0
β-indolylacetic acid 0.020%	24	35	0	30	0	18	0	40	0
β-indolylacetic acid 0.020%	48	5	0	20	0	36	0	10	0
β-indolylacetic acid 0.010%	24	70	0	10	0	24	0	70	0
β-indolylacetic acid 0.010%	48	45	0	5	0	48	0	50	0
α-naphtaleneacetic acid 0.005%	48	35	0	10	0	18	0	15	0
α-naphtaleneacetic acid 0.005%	—	—	—	—	—	36	0	35	0
Potassium α-naphtaleneacetic acid 0.005%	24	40	0	15	0	—	—	—	—

Thus, among cuttings from 3 year old plants, treated with β-indolylacetic acid, the percentage of rooted ones amounted to 70%, as against 30% of cuttings from 20—25 year old plants treated with the same acid. It should, however, be noted that in the latter case the cuttings had been lignified to a greater extent, and it seems probable that taken somewhat earlier they might possibly have given a higher ratio of rooting.

No response whatever to the action of growth substances was observed in cuttings planted in the hotbed, where lower temperature prevailed and

which was, moreover, situated so that direct sunlight could meet in only within the first half of the day. Similar results as regards this hotbed were obtained in our experiments of 1937. The effectiveness of growth substances was found also to depend greatly upon the time the cuttings were taken (Table 1) and upon development and lignification of the shoots they were made of (Table 2).

Under meteorological conditions prevailing in the spring and summer of 1938, the time between the 5th and 12th July proved to be most favourable for taking pine cuttings. When taken earlier, say on June 20, from succulent herb-like shoots having underdeveloped leaves, scarcely penetrating through their integuments, they soon became putrified. When taken later, viz. on July 20, they were almost completely lignified and formed callus, but stroke no roots. Of the slightly lignified cuttings from the upper part of the axial shoot, 65% responded by root-formation to the action of β-indolylacetic acid, while among cuttings taken from the lower more lignified part of the axial shoot this ratio did not exceed 30%. Much better rooting too was observed among the former as compared to the cuttings from the lateral shoots, which were not so strongly developed as the axial ones. By girdling lateral shoots (binding with wire) a fortnight before the treatment with growth substances we made the cuttings root easier (Table 2).

The rooting medium proved also greatly to affect the results of the action of growth substances. Best medium was found to be that composed of equal volumes of sand and sphagnum peat (Table 2).

Table 2

Material of treatment	Duration of treatment in hours	Ratio of rooted pine cuttings from 3 year old plants in %			Duration of treatment in hours	Ratio of rooted pine cuttings from 3 year old plants in %	
		upper part of axial shoot	of lateral shoot			planted in sand peat	planted in pure sand
			after girdling	without girdling			
Control	—	0	0	0	—	0	0
Water	24	0	0	0	24	0	0
β-indolylacetic acid 0.020%	12	40	25	15	24	40	30
» » 0.010%	24	65	35	20	24	75	50
» » 0.005%	—	—	—	—	24	50	35
α-naphtaleneacetic acid 0.005%	16	25	15	10	36	30	20
Potassium α-naphtaleneacetic acid 0.010%	24	35	20	10	36	30	20
Potassium α-naphtaleneacetic acid 0.005%	—	—	—	—	36	40	25

Of the growth substances applied β-indolylacetic acid appeared to be the most effective in making pine cuttings to root; α-naphtaleneacetic acid and its potassium salt produced equal effects, yet the latter was less toxic in high concetrations than the acid itself. The optimum concentrations of the growth substances tested, as regards stimulation of rooting, were the following: β-indolylacetic acid, 0.010%; α-naphtaleneacetic acid, 0.005%; potassium α-naphtaleneacetic acid, 0.005—0.010%; the duration of treatment ranging between 18 and 36 hours.

In neither of the tests did we find the control cuttings nor those treated with pure water to strike roots, while with optimal concentrations of β-indolylacetic acid the ratio of cuttings rooted amounted to 70—75%. The roots

appeared as soon as in 5 weeks. Two months after planting many of the cuttings possessed roots 20 cm long. As a rule, the roots issued from the callus and ran down at an angle of 45°. In some of the cuttings side roots emerged from under the bark, at a height of 1—1.5 cm from the basal end.

Literary data on the rooting response of pine cittings are very meagre. We were aware of nothing but the experiments of Kurdiani ([10]), who by means of the usual procedure made 2 to 4% of the cuttings root and observed the appearance of roots $4^1/_2$ months after planting. We regret he did not mention the age of the plants tested hy him. In the unpublished experiments of Bogdanov (Leningrad, Forest Engineering Academy) the cuttings from 10—15 year old plants of common pine, as well as of *Pinus montana*, could be brought by no means to root.

In another series of experiments we have studied the rooting response of cuttings from Siberian larch (*Larix sibirica*) and common oak (*Quercus pedunculata*) to the action of growth substances. The cuttings were made under different conditions. The results were similar to that obtained with the pine. The cuttings taken from 3, 10 or 20 year old plants and treated with β-indolylacetic acid rooted in great numbers (Table 3).

Table 3

Material of treatment	Duration of treatment in hours	Ratio of rooted cuttings in %				
		Siberian larch		Oak		
		age		age		
		3 years	10 years	3 years	10 years	20 years
Control	— „	20—30	10	10—15	5	5
β-indolylacetic acid 0.005—0.010%	24—48	85	70	80	55	40

It is therefore very likely that the power of root-formation is inherent in all plants and may be brought into action by growth substances, provided a suitable physiological state and proper conditions are chosen in preparing the cuttings. To find out such a state and those conditions is the chief problem we have to solve for obtaining positive results of the treatment in question.

Central Scientific Research Institute
for Forest Economy.
Leningrad.

Received
3. XI. 1938.

REFERENCES

[1] W. C. Cooper, Plant Phys., **10**, 789 (1935). [2] A. E. Hitchcock a. P. W. Zimmermann, Cont. B. Thom. Inst. **8**, 63 (1936). [3] R. W. Jackson a. R. H. Manske, Canad. Journ. Res. Sec. B., **13**, 170 (1935). [4] F. Laibach, Gartenbaumwiss., **11**, 65 (1937). [5] J. Scholz, Sbor. Zased. Československen. Akad. Zemědel v Bratislave, **71**, 648 (1937). [6] P. W. Zimmermann a. A. E. Hitchkock, Cont. B. Thom. Inst., **8**, 337 (1937). [7] Д. А. Комиссаров, Лесное хозяйство и лесоэксплоатация, № 8 (1936). [8] Д. А. Komissarov, C. R. Acad. Sci. URSS, XVIII, № 1 (1938). [9] Д. А. Комиссаров, Советская ботаника, № 3—4 (1938). [10] С. З. Курдиани, Лесной журнал, XXXVIII, вып. 3 (1908). [11] Н. А. Максимов и М. М. Гочолашвили, Изв. Батумского субтр. бот. сада, № 3 (1937). [12] А. Серейский, Бюлл. Моск. о-ва исп. природы, отд. биол., XIV (6) (1936). [13] R. Turezkaja, C. R. Acad. Sci. URSS, XVII, № 3 (1937). [14] Н. Г. Холодный, Природа, № 3 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1938. Volume XXI, № 9

ZOOLOGY

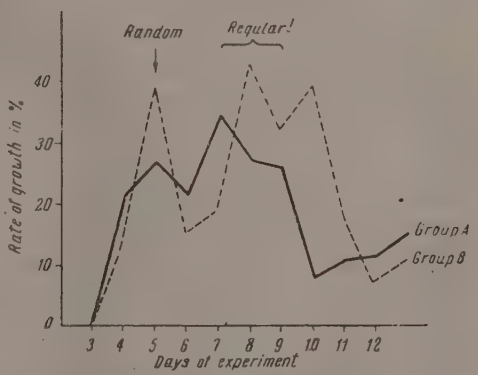
A METHOD FOR THE DESIGNING OF A NORMAL CURVE OF GROWTH OF A LIVING ORGANISM

By M. MSTISLAVSKY

(Communicated by I. I. Schmalhausen, Member of the Academy, 11. XI. 1938)

In studying the laws which rule the growth of organisms, the research-worker encounters quite often obstacles on his road.

As a matter of fact, the data concerning growth which are obtained by direct measuring do not fully reflect the regularities of this process. Strictly constant conditions of keeping cannot be secured by the method for breeding animals now available, and the empirical curve of growth reflects in every case the influence of various casual circumstances and factors.



Rate variations of growth in parallel groups in tadpoles of *Rana temporaria*.

To eliminate these casual influences and make evident the inner regularity of growth, the statistical method is applied, i. e. average values are calculated on the ground of repeated measurements. However, the amount of statistical material needed for obtaining a significant explanation for transitory variations of the rate of growth is such, that it is practically impossible to collect. Therefore, there always remain doubts in regard to the origin of the short growth periods, and we see ever and anon that different authors describe from 2—3 to several dozens of growth cycles in the same animal [(1–7) et al.].

Studying growth on tadpoles in 1933, we found a method which permitted of eliminating this obstacle and delimiting in an objective manner the inner law of growth from the casual distortions.

This method, which may be called the method of parallel groups, is based on the following idea. Two broods of animals with a precisely known age difference are taken for the experiment: e. g. group *A* is selected from animals born just one day earlier than those of group *B*. After this both groups are bred parallelly, in such a manner that every change in the conditions of keeping is strictly simultaneous in both. If now we plot the curves of growth for

these two groups on one common graph, we are able to determine the origin of the slightest variations of the rate of growth, i. e. whether they are due to the inner regularity of growth, or are caused by alterations of the surrounding medium. And indeed, all the alterations, conforming to the inner law of growth, must arise in group B one day later, than in group A, while those alterations which arise simultaneously must be ascribed to outside influences. An example of this is supplied in the diagram, in which these two types of rate alterations in both groups may be readily discerned.

The method of parallel groups permits moreover of designing on the ground of simple calculations the curve of growth which the animal would have, if the conditions of its keeping had been constant.

Every weight increase of an organism is in the last account the realization of the food and energy mass, which has been supplied to it in the course of a definite period. In an algebraic form we can therefore express the specific increase a by means of the following formula:

$$a = kE, \tag{1}$$

in which E is the amount of energy and matter supplied from the outside, and k — a certain coefficient of utilization. The nature of coefficient k is, of course, very complicated and it is constituted by a number of values (losses bound with digestion, losses for sustaining the life activities, motion expenses, etc.); however, in a general form this formula is justified. The rates of growth of the two parallel groups, as measured by us, are expressed according to formula (1) in the shape of two ranges:

$$\begin{array}{llll} a_1 = k_1E_1 & a_2 = k_2E_2 & a_3 = k_3E_3 \ldots & a_n = k_nE_n \\ b_1 = k_1E_2 & b_2 = k_2E_3 \ldots & b_{n-1} = k_{n-1}E_n, & \end{array} \tag{2}$$

in which $k_1k_2k_3 \ldots k_n$ are the daily coefficients of utilization of food for growth, and $E_1E_2E_3 \ldots E_n$ — the daily amounts of matter and energy supplied. The range B is displaced as compared with range A in such a way, that growth in it during the first day proceeds at the expense of E_2, during the second — at that of E_3, etc. If now we take the ratio of the corresponding terms of the ranges A and B, we are able to calculate the changes of the component E by days.

For instance, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{k_1E_2}{k_1E_1}$, whence $E_2 = E_1\frac{b_1}{a_1}$. Similarly, $\frac{b_2}{a_2} = \frac{k_2E_3}{k_2E_2}$, whence $E_3 = E_2\frac{b_2}{a_2}$, or by substituting the value of E_2 from the preceding formula, $E_3 = E_1\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$.

In a general form every term E_n can be expressed with the help of E_1 by the following formula:

$$E_n = E_1\frac{b_1b_2b_3 \ldots b_n}{a_1a_2a_3 \ldots a_n}. \tag{3}$$

We can now in every term of the range (2) substitute E_1 for E by using formula (3).

We obtain thus the following new range:

$$k_1E_1 = a_1 \quad k_2E_2 = a_2 \quad \text{or} \quad k_2E_1\frac{b_1}{a_1} = a_2,$$

hence $k_2E_1 = \frac{a_1a_2}{b_1}$. Similarly

$$k_3E_3 = a_3 \quad \text{or} \quad k_3E_1\frac{b_1b_2}{a_1a_2} = a_3,$$

hence $k_3E_1 = \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2}$.

In a general form

$$k_n E_1 = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}}, \qquad (4)$$

where $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ are the daily increases of group A and $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$ — those of group B.

The range of values of the growth increases calculated according to formula (4) is absolutely independent from the changes in the surroundings, which occurred during the experiment, and supplies the truly normal curve of growth of the organism.

Of course, strictly considered, the method of calculation described above contains some simplifications and gives accurate results, only if certain conditions are observed.

1. First of all the main formula (1) does not express the dependence of the increase on the surroundings for every variation of the value of E. In its full form this dependence is expressed by a curve, possessing a maximum—the optimum point—and two descending branches. This curve can be identified with a straight line only within narrow limits. Hence the first demand: the conditions under which the animals are kept in the experiments with parallel groups must be constant as far as possible.

2. Formula (3) is completely inapplicable in the optimum point and at the physiological limits of growth. The notion of the coefficient of utilization cannot be applied, as it is known, at these points, and the value of the increase changes in them at so slow a rate, that it is impossible to calculate it according to such a simple method. Hence the second demand: the animals must be bred under conditions equally distant from the optimum point and from those of the physiological limits of growth.

3. It is necessary, moreover, to keep in mind the regulatory capabilities of the organism. With time the age difference between the two parallel groups is levelled out. Therefore it is necessary to take groups with a considerable difference in age, and when large growth periods are studied, to study consecutively several pairs of parallel groups.

4. In conclusion the groups must be numerous and strictly uniform, so as to assure a perfect identity of the initial condition of groups A and B.

It were, thus, a big mistake to think that, when applying the method of parallel groups, the research-worker is allowed to pay no attention to the constancy of the conditions, under which the experimental animals are kept, and to the selection of his material. On the contrary, even greater caution is needed here in some respect, than in the usual experiments. However, if the four chief conditions enumerated above are fulfilled and combined with statistical corrections on the base of several pairs of groups, this method permits of eliminating completely the influence of the breeding conditions on the course of growth.

The method described has been applied by us with success to the study of the laws of growth of White Laghorn chickens ([8]) and this test showed its practical applicability.

Institute of Zoology.
1st Moscow University.

Received
14.XI.1938.

REFERENCES

[1] Квитко, Тр. Россошанск. ин-та птицепром., I (1935). [2] Backmann, Skand. Arch. f. Physiol., **64** (1932). [3] Brody, Missouri Agr. Exp. St. Research Bulletin, № 96—97 (1927). [4] Herritier, C. R. de Séanc. de la Soc. de Biol., **100**, 79 (1929). [5] Saller, Roux' Arch., 111 (1927). [6] Schmalhausen, Roux'Arch., **115** (1929). [7] Teissier, Skand. Archiv f. Physiol., **66** (1933). [8] Мстиславский, Зап. Моск. ун-та, вып. 20 (1938).

PRIX D'ABONNEMENT

Un an — 36 livraisons . . . . $ 15.00. Frs. fr. 250.00. £ 2.8.0
Six mois — 18 livraisons . . . $ 7.50. Frs. fr. 125.00. £ 1.4.0
(Séparément $ 0.50. Frs. fr. 8.00. £ 0.1.6 le numéro)

URSS — MEZDUNARODNAJA KNIGA, 18, Kuznetskij Most, Moscou (Compte courant n° 263 Banque d'Etat de l'URSS, 12, Neglinnaja, Moscou).
U. S. A., NORTH and SOUTH AMERICA — BOOKNIGA CORPORATION. 255 Fifth Avenue. New York, N. Y.
ENGLAND — W. H. SMITH & son, Ltd. Strand House, Portugal Str. London W. C. 2.
COLLET'S Foreign Department. 31 Gerrard Street, London W. I.
FRANCE — MESSAGERIES HACHETTE. Service Abonnements. 111, Rue Réaumur. Paris, 2e.
SUISSE — Buchhandlung STAUFFACHER (Genossenschaft). Hauptpost-Fach 43, Zürich.
ESPANA — „DISTRIBUIDORA DE PUBLICACIONES". Diputacion, 260. Barcelona.
Č. S. R. — MELANTRICH, Akc. Spol. Knihkupectvi — odd. slovanských knih. Václavské nám 42. Praha II. (Účet pošt. spoř. 20. 208).
BELGIQUE — OBLA (Office Belge Littéraire et Artistique). 6/8/10, rue Duquesnoy. Bruxelles.
LIETUVA — „MOKSLAS". Knygynas. Laisves Aleja, 46. Kaunas.
— SPAUDOS FONDAS. Laisves Al. 62. Kaunas.
TURQUIE — LIBRAIRIE HACHETTE. Succursale de Turquie. 469, Avenue de l'Indépendance. Boite Postale Pera 2219. Istanbul.
DEUTSCHLAND — KOEHLER & VOLCKMAR, A/G. Russland-Abteilung. Postfach 173. Leipzig C. I.
POLSKA — GEBETHNER & WOLFF. Filja I. Krakowskie Przedm. 15. Warszawa.
ROSSICA. Chmielna 5. Warszawa.
PALESTINE — SAFRAN CO. Jaffa Rd. 36. P. O. B. 223. Haifa.
LATVIJA — VALTERS un RAPA Akc. Sab. Teatra iela II. Riga (Pasta tek. rek. № 675).
K/s „LAIKMETS". Terbatas iela 37. Riga.
SVERIGE — C. E. FRITZE's Kgl. Hofbuchhandlung. Fredsgatan 2, Stockholm.
A. B. WENNERCRENS WIILIAMS Box 657, Stockholm I.
AUSTRALIA — MODERN PUBLISHERS Ltd., 124 Oxford Street. Sydney.
BULGARIA — T. F. TSCHIPEFF. Buchhandlung Boulevard Dondoukoff 20/22 Sofia. (Postscheckkonto-Sofia 540).
NORGE — JOHAN GRUNDT TANUM. Tidligere Aschehougs Boghandel. Karl Johans gt. 43. Oslo.
ROMANIA — Biroul Central de Presa „LUVRU". Strada Oltuz, 14, Bucuresti I.
EESTI — TÖÖKÖÖL, Pärnu mnt. 28, Tallinn.
DÄNEMARK — S. U. V. s Boghandel. Frederiksbarggade 42¹. Kopenhagen. K.

Les «Comptes Rendus», largement expédiés à l'étranger dans les centres scientifiques les plus importants et dans les bureaux de nombreuses revues, sont le seul organe scientifique en URSS, donnant tous les dix jours un compte rendu des plus récentes acquisitions de la science soviétique.

Prix $ 0.50.